Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Integral definida – 17/02/2023	

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x\operatorname{sen}(x)$.

a) [1] Calcula $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) [1,5] Calcula el área del recinto delimitado por su gráfica y el eje de abscisas en el intervalo $[0\,,2\pi]$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos las funciones $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2-5 \quad , \quad g(x)=4$$

a) [0,5] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x=1$.

b) [0,75] Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones junto con dicha tangente.

c) [1,25] Calcula el área del recinto anterior.

EJERCICIO 3:

a) [1,25] Estudia la monotonía y determina los extremos de la función F definida por

$$F(x)=\int_1^x \frac{\ln(t)-1}{1+t}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x>0$$

b) [1,25] Calcula

$$\int_0^3 6x\,|2-x|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos para $a>0$ constante las funciones $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=2a^2-x^2$$

a) [1] ¿Qué tipo de gráfica tiene cada una de ellas? ¿En qué puntos se interceptan?

b) [1,5] ¿Para qué valor de dicha constante el recinto delimitado por sus gráficas tiene un área igual a $72\,\mathrm{u}^2$.

EJERCICIO 1:

Obtengamos la primitiva siguiente por partes:

$$\int \underset{d}{\underline{2x}} \cdot \underset{i}{\underline{\operatorname{sen} x}}\, \mathrm{d}x = -2x \cdot \cos x + \int 2 \cdot \cos x\, \mathrm{d}x = -2x\ \cos x + 2 \operatorname{sen} x + C$$

Primero calculemos los ceros para ver los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas:

$$f\left(x\right) = 0 \rightarrow 2x \cdot \operatorname{sen} x = 0 \begin{array}{l} \nearrow \quad x = 0 \\ \searrow \quad \operatorname{sen} x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = 0, \pi, 2\pi \end{array}$$

Calculamos entonces separadamente, aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi} f\left(x\right) \mathrm{d}x = \Big[-2x\ \cos x + 2 \operatorname{sen} x\Big]_{x=0}^{x=\pi} = 2\pi > 0$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f\left(x\right) \mathrm{d}x = \Big[-2x\ \cos x + 2 \operatorname{sen} x\Big]_{x=\pi}^{x=2\pi} = -4\pi - 2\pi = -6\pi < 0$$

Luego el área del recinto es la suma de los valores absolutos de esas integrales:

$$a(\mathscr{R}) = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = 2\pi + 6\pi = 8\pi \quad (\mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 2:

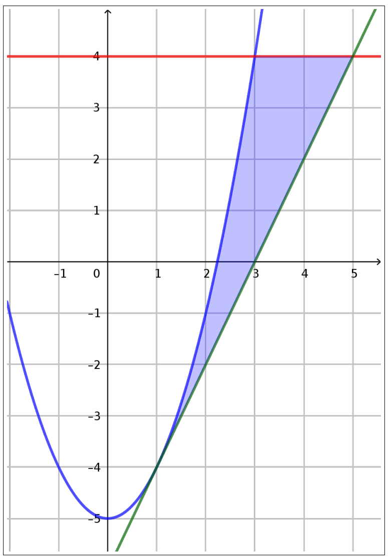
a) Derivamos

$$f\left(x\right) = x^2 - 5 \rightarrow f'\left(x\right) = 2x$$

La recta tangente pedida es:

$$y - f\left(1\right) = f'\left(1\right) \cdot \left(x - 1\right) \ \rightarrow\ y + 4 = 2 \cdot \left(x - 1\right) \ \rightarrow\ y = 2x - 6$$

b) Las gráficas son dos parábolas y una recta, la tangente, que llamaremos $h\left(x\right) = 2x - 6$. Unas tablitas:



x	-1	0	1	2	3	4	5
f(*x*)	-4	-5	-4	-1	4	11	20
g(*x*)	4	4	4	4	4	4	4
h(*x*)	-8	-6	-4	-2	0	2	4

Observamos en la tabla los puntos en los que se cortan: para $x = 1$ *f* y *h*, para $x = 3$ *f* y *g*, para $x = 5$ *g* y *h*. Consideremos así el recinto como el el formado por dos zonas:

R1: desde $x = 1$ hasta $x = 3$ entre $y = f(x)$ e $y = h(x)$

R2: desde $x = 3$ hasta $x = 5$ entre $y = g(x)$ e $y = h(x)$

Calculamos así:

$$\int_1^3 (f - h) = \int_1^3 \left(x^2 - 2x + 1\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{8}{3}$$

$$\int_3^4 (g - h) = \int_3^4 (-2x + 10)\, \mathrm{d}x = \Big[-x^2 + 10x\Big]_{x=3}^{x=4} = 4$$

Luego el área es:

$$a(\mathscr{R}) = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}\ \mathrm{u}^2$$

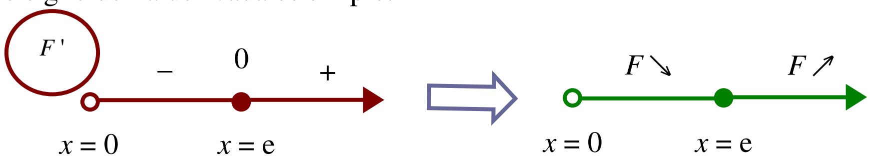
(*Nota*: la área podríamos obtenerla como la superficie de un triángulo; sería $b \cdot h$: 2 = 2 · 4 : 2 = 4)

EJERCICIO 3:

a) Como el integrando es continuo (el denominador nunca se anula y el logaritmo es continuo a partir del cero), el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que su derivada es el integrando:

$$F'(x) = \frac{\ln x - 1}{1+x} \quad , \quad x > 0$$

El estudio de signo de la derivada es simple:



Deducimos que para $x = \mathrm{e}$ hay un máximo absoluto.

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$2 - x = 0 \rightarrow x = 2$$

Observando el signo, el valor absoluto queda expresado a trozos así:

$$6x \cdot |2-x| = \begin{cases} -6x^2 + 12x & \text{si} \quad x < 2 \\ 6x^2 - 12x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

El separa-fórmulas $x = 2$ queda en el intervalo de integración, así que que separamos la integral en dos:

$$\int_0^3 (6x\,|2-x|)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(-6x^2 + 12x\right)\mathrm{d}x + \int_2^3 \left(x^2 - 12x\right)\,\mathrm{d}x$$

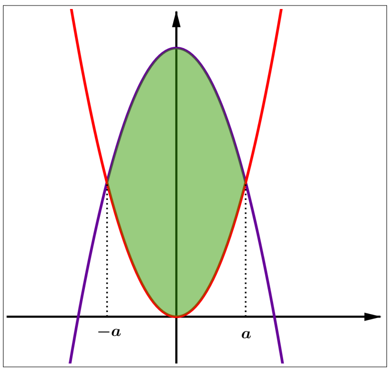
Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_0^3 6x\,|2-x|\,\mathrm{d}x = \Big[-2x^3 + 6x^2\Big]_{x=0}^{x=2} + \Big[2x^3 - 6x^2\Big]_{x=2}^{x=3} = 8 + 8 = 16$$

EJERCICIO 4:

a) Observemos que sus gráficas son dos parábolas: la de f es convexa y la g cóncava. Es fácil comprobar dónde se cortan:

$$x^2 = -x^2 + 2a^2 \;\rightarrow\; 2x^2 = 2a^2 \;\rightarrow\; x^2 = a^2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{a^2} \;\rightarrow\; x = \pm a$$



b) Calculamos

$$\int_{-a}^{a} (g - f)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \left(-2x^2 + 2a^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{-2x^3}{3} + 2a^2x\right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{8a^3}{3}$$

Luego:

$$\frac{8a^3}{3} = 72 \;\rightarrow\; a^3 = 27 \;\rightarrow\; a = 3$$