EJERCICIO 1:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{3x+16}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 2:

Obtén la integral indefinida

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x+1=t^2$

EJERCICIO 3:

Obtén la primitiva $F : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ de la función

$$f\left(x\right) = \operatorname{sen}\left(\ln x\right) \qquad ,, \qquad x>0$$

y cuya gráfica que pasa por el punto $(1\,,1)$.

EJERCICIO 4:

Halla la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sabiendo que su derivada está definida por

$$f'\left(x\right) = \begin{cases} 6\,\mathrm{e}^{2x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{6}{1+9x^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

y que $y=5$ es una asíntota horizontal de su gráfica para $x \to -\infty$.

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas, indicando $u\left(x\right)$:

a) $\displaystyle\int \frac{3}{\left(4x-1\right)^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{7}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \tan\left(5x\right)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int 5\csc^2\left(7x\right)\mathrm{d}x$

<u>Observación</u>: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse, los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

El grado del numerador es el menor y no es una logarítmica directa. Veamos los ceros del denominador:

$$x^2 - x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = -2\,, x = 3$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{3x+16}{(x+2)\,(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \qquad [*]$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$3x + 16 = a\,(x-3) + b\,(x+2) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x = -2 \rightarrow 10 = -5a \rightarrow a = -2 \\ \text{si } x = +3 \rightarrow 25 = +5b \rightarrow b = +5 \end{cases} \qquad [**]$$

De [*] y [**] resulta:

$$\int \frac{3x+16}{x^2 - x - 6}\,\mathrm{d}x = -2\ln|x+2| + 5\ln|x-3| + C$$

EJERCICIO 2:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x + 1 = t^2 \rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t^2} - 1} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$(2t) : (t-1) \;\rightarrow\; \begin{cases} c = 2 \\ r = 2 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int 2\,\mathrm{d}t + \int \frac{2}{t-1}\,\mathrm{d}t = 2t + 2\ln(t-1) + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $x + 1 = t^2 \rightarrow t = \sqrt{x+1}$:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+1} + 2\ln|\sqrt{x+1} - 1| + C$$

EJERCICIO 3:

Haremos por partes esa integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \underset{i}{1} \cdot \underset{d}{\underline{\operatorname{sen}(\ln x)}}\,\mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \left[x \cdot \cos(\ln x) + \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \right] \\ &= x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x) - I \end{aligned}$$

La despejamos llamando $g(x)$ a la fórmula que aparece en la última igualdad:

$$I = g(x) - I \rightarrow I = g(x) \rightarrow I = \frac{g(x)}{2}$$

Así:

$$F(x) = \frac{x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - x \cdot \cos(\ln x)}{2} + C$$

Hallemos esa constante con condición dada

$$F(1) = 1 \rightarrow -\frac{1}{2} + C = 1 \rightarrow C = \frac{3}{2}$$

Queda:

$$F(x) = \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(\ln x) - \frac{1}{2} x \cos(\ln x) + \frac{3}{2}$$

EJERCICIO 4:

Integramos cada trozo (formas compuestas exponencial y arco-tangente):

$$f(x) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{2x} + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2\arctan(3x) + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0) = f(0-) = f(0+) \rightarrow 3 + a = b$$

Sabemos que:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(3\mathrm{e}^{2x} + a\right) = 5 \xrightarrow{e^{-\infty}=0} 0 + a = 5 \rightarrow a = 5 \xrightarrow{susti} b = 8$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} 3\mathrm{e}^{2x} + 5 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2\arctan(3x) + 8 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = 4x - 1$:

$$I = \frac{3}{4} \int 4(4x-1)^{-2}\, \mathrm{d}x = -\frac{3}{4}(4x-1)^{-1} + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 2x$:

$$I = \frac{7}{2} \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{7}{2} \operatorname{arc\,sen}(2x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \cos 5x$:

$$I = -\frac{1}{5} \int \frac{-5 \operatorname{sen} 5x}{\cos 5x}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{5} \ln|\cos 5x| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo cotangente con $u = 7x$:

$$I = \frac{5}{7} \int \frac{7}{\operatorname{sen}^2(7x)}\, \mathrm{d}x = -\frac{5}{7} \cot(7x) + C$$