Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Aplicaciones de las Derivadas – 25/11/2022	

EJERCICIO 1:

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{2-2\cos(3x)}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) [2] Halla a, b y c sabiendo que es continua en todo punto y que $(-2\,,21)$ es un punto de inflexión de su gráfica.

b) [0,5] Obtén la ecuación de la recta normal en dicho punto de inflexión.

EJERCICIO 2:

Consideremos la función f definida por

$$f(x)=ax+\frac{b}{x-1} \qquad (x\neq 1)$$

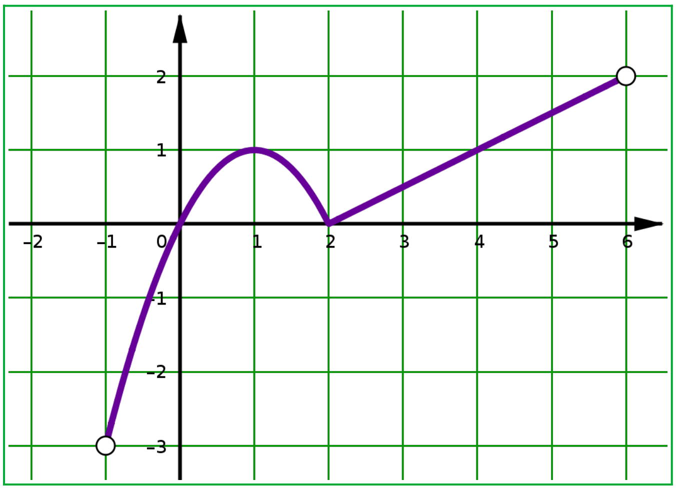
a) [1] Determina los valores de a y b sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto $(-1\,,-9)$.

b) [1] Para $a=3$ y $b=12$ calcula razonadamente sus valores extremos en el compacto $[2\,,4]$.

c) [1] También para $a=3$ y $b=12$ halla las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 3:

Aquí vemos la gráfica de la función derivada de cierta $f:(-1\,,6)\longrightarrow\mathbb{R}$.



a) [0,5] Razona si f es derivable en todo su dominio. ¿Y dos veces derivable?

b) [0,5] Averigua en qué intervalos crece y decrece la gráfica de f, clasificando los puntos críticos.

c) [0,5] Estudia la curvatura de la gráfica de f, indicando dónde se alcanzan los puntos de inflexión.

d) [0,5] ¿Es en algún punto la recta tangente a $y=f(x)$ paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante? ¿Y paralela al eje de abscisas?

EJERCICIO 4: [2,5]

Se desea construir con 240 euros una caja (paralelepípedo o prisma recto) sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 5 euros / m² para los laterales y de 20 euros / m² para la base.

Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede conseguir. ¿Cuál es ese volumen máximo?

EJERCICIO 1:

Continuidad

Si es continua en todo punto, en particular lo es en $x = 0$ (separa-fórmulas). Veamos:

Valor: $f(0) = 0 + 0 + 0 + c = c$

Límites: $f(0-) = 0 + 0 + 0 + c = c$

$$f(0+) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{6\,\mathrm{sen}\,(3x)}{2x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{18\cos(3x)}{2} = 9$$

Es continua sólo cuando todo coincide:

$$c = 9$$

Inflexión

Como habla de inflexión en $(-2\,,21)$, primero derivemos dos veces la función para $x < 0$:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2ax \;\rightarrow\; f''(x) = 6x + 2a$$

Como $(-2\,,21)$ es inflexión:

$$f''(-2) = 0 \;\rightarrow\; -12 + 2a = 0 \;\rightarrow\; a = 6$$

Como $(-2\,,21)$ es un punto de la gráfica:

$$f(-2) = 21 \;\rightarrow\; (-2)^3 + 6\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + 9 = 21 \;\rightarrow\; b = 2$$

Recta normal

Tenemos $x < 2 \rightarrow f(x) = x^3 + 6x^2 + 2x + 9 \xrightarrow{D} f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$ y así:

$$y - f(-2) = \frac{-1}{f'(-2)}(x+2) \;\rightarrow\; y - 21 = \frac{1}{10}\cdot(x+2)$$

EJERCICIO 2:

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1} \rightarrow f'(x) = a - \frac{b}{(x-1)^2}$$

a) Si en $(-1\,,-9)$ hay un extremo relativo deducimos dos cosas:

La derivada es cero: $f'(-1) = 0 \;\rightarrow\; a - \dfrac{b}{4} = 0$ [*]

La gráfica pasa por ese punto: $f(-1) = -9 \;\rightarrow\; -a - \dfrac{b}{2} = -9$ [**]

Si sumamos sacamos directamente b y luego basta despejar y calcular a:

$$[*] + [**] \rightarrow -\frac{b}{4} - \frac{b}{2} = -9 \rightarrow b = 12 \rightarrow a = \frac{12}{4} = 3$$

Resulta $a = 3\,,\, b = 12$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 12}{x-1} \longrightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 6x - 9}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x = -1\;,\; x = 3$$

La función es continua en $[2\,,4]$, así que tiene máximo y mínimo absoluto. Tabla de variación:

x	2		3		4
y	18	↘	15	↗	16

El máximo absoluto es el punto $(2\,,18)$ y el mínimo absoluto es $(3\,,15)$.

c) Asíntotas verticales: sólo puede haber discontinuidad de salto infinito en el cero del denominador:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3x+12}{x-1}=\left[\frac{12}{0}\right]=\pm\infty$$

Concluimos que $x=1$ es una asíntota vertical.

Asíntota horizontal: calculemos el límite en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-3x+12}{x-1}\overset{*}{=}\pm\infty$$

Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador > grado denominador).

Concluimos que no hay asíntota horizontal.

Asíntota oblicua: podría haber una asíntota $y=mx+n$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-3x+12}{x^2-x}\overset{*}{=}\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2-3x+12}{x-1}-3x\right)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{12}{x-1}\overset{*}{=}0$$

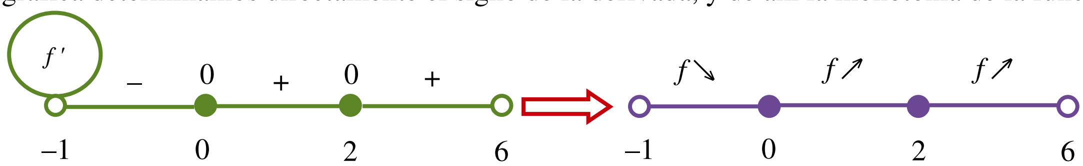
Donde en (*) hemos usado la regla de los grados (grado numerador = grado denominador)

Concluimos que $y=3x$ es una asíntota oblicua.

EJERCICIO 3:

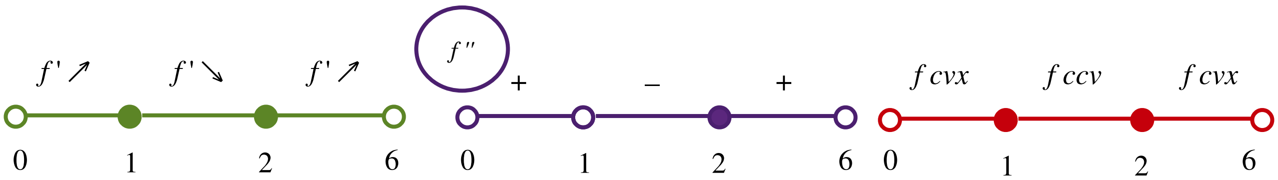
a) Apreciamos que existe $f'(x)$ para todo x del dominio, y se puede derivar dos veces en todo punto salvo $x=2$, donde la gráfica de f' presenta un punto anguloso.

b) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Para $x=0$ la función f tiene el único extremo relativo, que por ello debe ser un mínimo absoluto. Y para $x=2$ un punto de silla

c) De la monotonía de f' deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



Concluimos que f presenta puntos de inflexión: para $x=1$ y $x=2$.

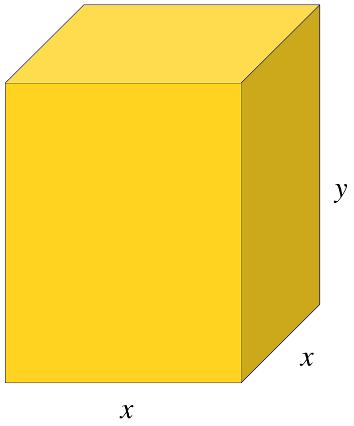
d) La recta tangente es tangente a la recta $y=x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes) cuando tiene la misma pendiente:

$$m=1\to f'(x)=1\to x=1\,,x=4$$

La recta tangente es horizontal (paralela al eje de abscisas) cuando tiene pendiente es cero:

$$m=0\to f'(x)=0\to x=0\,,x=2$$

EJERCICIO 4:



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Sea x el lado de la base (cuadrada) e y la altura de la caja.

Queremos maximizar el volumen de la caja:

$$V = x \cdot x \cdot y = x^2 y$$

[Ligadura]

Observemos que la caja (sin tapa) está compuesta de un cuadrado (de área x^2) y de cuatro rectángulos iguales (de área $x \cdot y$). Así:

$$\text{Coste} = 240 \to 20 \cdot x^2 + 5 \cdot 4xy = 240 \to y = \frac{240 - 20x^2}{20x} = \frac{12 - x^2}{x}$$

[Expresión de la función]

Luego tenemos que <u>maximizar</u> la función volumen:

$$V = x^2 \cdot \frac{12 - x^2}{x} = x\left(12 - x^2\right) = 12x - x^3$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

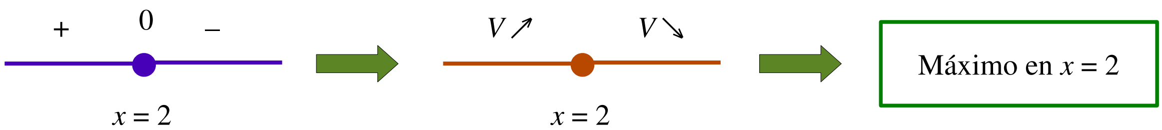
Derivamos

$$V' = 12 - 3x^2$$

Igualamos a cero:

$$12 - 3x^2 = 0 \to x^2 = \frac{12}{3} \to x^2 = 4 \to x = +\sqrt{4} = 2$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de V:



[Conclusión]

Así la caja tiene como base un cuadrado cuyo lado mide 2 m y una altura que mide $\frac{12 - 2^2}{2} = 4$ m.

Su volumen (el máximo posible) es

$$V = 2^2 \cdot 4 = 16\text{m}^3$$