Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 11/11/2022

EJERCICIO 1: [3]

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x-1} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 2 + \cos(\pi x) & \text{si} \quad -1 < x \leq 0 \\ (x+3)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia su continuidad.

b) [1,25] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [1] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a(2x-1)^3 & \text{si} \quad x < 1 \\ \sqrt{3x-5b} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo su dominio.

EJERCICIO 3: [2,5]

a) [1,25] Obtén la ecuación de la normal a la curva $y = x\,|x-2|$ para $x = 0$.

b) [1,25] Obtén la ecuación de la tangente a la gráfica de la función definida por

$$f(x) = 3x - \ln(2x) \quad , \quad x > 0$$

que es paralela a la recta de ecuación $2x - y + 5 = 0$.

EJERCICIO 4: [2,5]

Calcula, según los valores de a, el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - a\,\mathrm{sen}(x) + x\cos(3x)}{x^2}$$

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para $x=-1$ y para $x=0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=-1}$

Valor: $f(-1)=\dfrac{-4}{-2}=2$

Límites: $\lim\limits_{x\to-1} f(x)\begin{cases} f(-1_-)=2 \\ f(-1_+)=2+\cos(-\pi)=2-1=1 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito para $x=-1$.

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0)=2+\cos 0=3$

Límites: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\begin{cases} f(0_-)=3 \\ f(0_+)=3\cdot \mathrm{e}^0=3 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x=0$.

b) Usamos las reglas de derivación directamente para $x\neq -1,0$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x<-1 \\ -\pi\,\mathrm{sen}(\pi x) & \text{si} \quad -1<x<0 \\ (-x-2)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Para $x=-1$, como no es continua no puede ser derivable.

Para $x=0$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales D.L. $\begin{cases} f'(0_-)=0 \\ f'(0_+)=-2 \end{cases}$

Concluimos, al no ser iguales, que f no es derivable para $x=0$ (es un punto *anguloso*).

c) <u>Asíntotas verticales</u>: no hay pues no hay saltos infinitos

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{x-1}=\frac{3}{1}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+3)\,\mathrm{e}^{-x}=[+\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{\mathrm{e}^x}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]\overset{*}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^x}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$$

Donde en (*) hemos usado la Regla de L'Hôpital,

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales:

$y=3$ para $x\to-\infty$

$y=0$ para $x\to+\infty$

EJERCICIO 2:

En primer lugar, como la función es derivable en todo punto, entonces es continua en todo punto. En particular, es continua para $x=1$ y por ello:

$$f(1)=f(1_+)=f(1_-)\ \to\ a=\sqrt{3-5b}\ [*]$$

Como la función es derivable en todo punto, en particular es derivable para $x = 1$. Derivando directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} 6a(2x-1)^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{3}{2\sqrt{3x-5b}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(1_-) = 6a \\ f'(1+) = \dfrac{3}{2\sqrt{3-5b}} \end{cases}$$

Como las derivadas laterales para $x = 1$ deben coincidir:

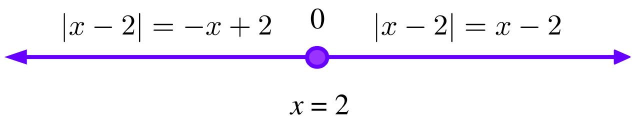
$$6a = \frac{3}{2\sqrt{3-5b}} \text{ [**]}$$

Sustituyendo a desde [*] en [**] obtenemos:

$$6\sqrt{3-5b} = \frac{3}{2\sqrt{3-5b}} \to 12\left(\sqrt{3-5b}\right)^2 = 3 \to 36 - 60b = 3 \to b = \frac{11}{20} \xrightarrow{susti} a = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 3:

a) Es $x - 2 = 0 \to x = 2$, siendo $x - 2$ positivo si $x > 2$ y negativo si $x < 2$. Luego



Queda entonces:

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x(-x+2) = -x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 2 \\ x(x-2) = x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Derivando directamente para $x \neq 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

De donde la normal pedida es:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x - 0) \to y = -\frac{1}{2}x$$

b) Derivemos ante todo:

$$f(x) = 3x - \ln(2x) \xrightarrow{D} f'(x) = 3 - \frac{2}{2x} = 3 - \frac{1}{x}$$

La tangente debe tener la misma pendiente que la recta:

$$2x - y + 5 = 0 \to 2x + 5 = y \to m = 2$$

Y como la pendiente de la tangente es la derivada:

$$f'(x) = m \to 3 - \frac{1}{x} = 2 \to 1 = \frac{1}{x} \to x = 1$$

La fórmula de la recta tangente:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \to y - 3 + \ln 2 = 2(x - 1) \to y = 2x + 1 - \ln 2$$

EJERCICIO 4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,\mathrm{sen}(x)+x\cos(3x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[L'H]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-a\cos x+\cos(3x)-3x\,\mathrm{sen}(3x)}{2x}=\left[\frac{2-a}{0}\right]=L$$

Si $a\neq 2$ eso es un límite infinito:

$$L=\left[\frac{2-a}{0}\right]=\pm\infty$$

Si $a=2$ eso es una indeterminación:

$$L=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{[L'H\hat{o}p]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}+2\,\mathrm{sen}\,x-3\,\mathrm{sen}(3x)-3\,\mathrm{sen}(3x)-9x\cos(3x)}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)'=\frac{0\cdot(x+1)-1\cdot 1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Big[3x\,\mathrm{sen}(3x)\Big]'=3\,\mathrm{sen}(3x)+3x\cos(3x)\cdot 3=3\,\mathrm{sen}(3x)+9x\cos(3x)$$