Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Examen Extraordinario – 21/06/2021	

EJERCICIO 1: Calcula según los valores de a el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{3x}-a}{x\cos(x)}$$

EJERCICIO 2: Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

a) [1] Obtenga los valores de a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión para $x=0$ y que presenta un extremo relativo en el punto $(-1,3)$.

b) [1,5] Si $a=0$, $b=-3$, $c=1$ analice su monotonía y su curvatura.

EJERCICIO 3: Obtén la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{4x-1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4:

Dibuja las gráficas definidas a través de $y=4x-x^2$ e $y=x$ y obtén el área del recinto que determinan.

EJERCICIO 5: Sea

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & -6 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro k existe D^{-1}.

b) [1,75] Resuelva para $k=2$ la ecuación $X\,D=D^t$.

EJERCICIO 6: Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} (m+2)x-\quad y-z & = & 1 \\ -x-\quad y+z & = & -1 \\ x+my-z & = & m \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

b) [1] Resuélvelo cuando tenga infinitas soluciones.

EJERCICIO 7: Consideremos el punto y el plano definidos por

$$P(-1\,,1\,,1) \quad , \quad \pi: -x+2y+2z+4=0$$

a) [1,25] Halla el simétrico del punto P respecto del plano π.

b) [1,25] Calcula el área del triángulo que determina el plano con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 8: Consideremos el punto y la recta

$$A(3\,,1\,,2) \quad , \quad r: \frac{x+2}{-1}=y-1=z-6$$

a) [1,5] Calcula las coordenadas de la proyección de A sobre r.

b) [1] Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y a la recta r.

Elige cuatro de los ocho problemas propuestos

EJERCICIO 1:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{3x} - a}{x \cos(x)} = \left[\frac{2-a}{0}\right] [*]$$

Si $a \neq 2$: es [*] un límite infinito (numerador tiende a número no nulo y denominador a cero):

$$L = \left[\frac{2-a}{0}\right] = \pm\infty$$

Caso $a = 2$: es [*] una indeterminación, que resolvemos aplicando otra vez L'Hôpital:

$$L = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{6e^{3x}}{1 \cdot \cos(x) - x \operatorname{sen}(x)} = \frac{6}{1-0} = 6$$

EJERCICIO 2:

a) Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = x^3 + 2ax + b \xrightarrow{D} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \xrightarrow{D} f''(x) = 6x + 2a$$

Para $x = 0$ hay inflexión así: $f''(0) = 0 \to 2a = 0 \to a = 0$

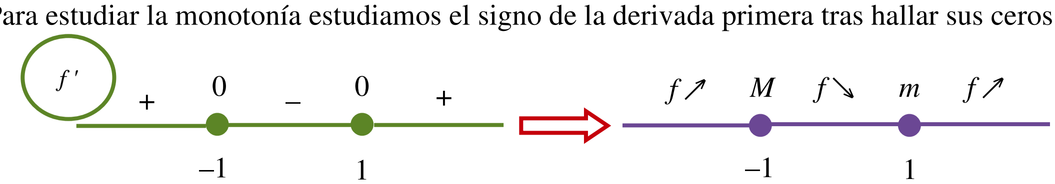
Para $x = -1$ hay extremo: $f'(-1) = 0 \to 3 + b = 0 \to b = -3$

La gráfica pasa por $(-1, 3)$: $f(-1) = 3 \to -1 + 3 + c = 3 \to c = 1$

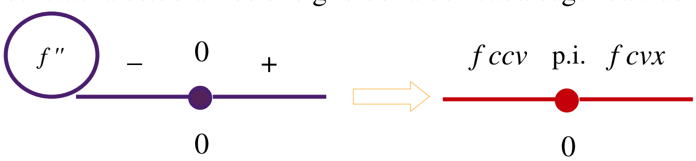
b) Primero derivaremos:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \xrightarrow{D} f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{D} f''(x) = 6x$$

Para estudiar la monotonía estudiamos el signo de la derivada primera tras hallar sus ceros ($x = \pm 1$):



Para estudiar la curvatura estudiamos el signo de la derivada segunda tras hallar sus ceros ($x = 0$):



EJERCICIO 3:

Como ya el grado del numerador es menor que el del denominador, obtengamos los ceros de éste:

$$x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow x = -2\,,1$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{4x-1}{(x+2)(x-1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + b(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

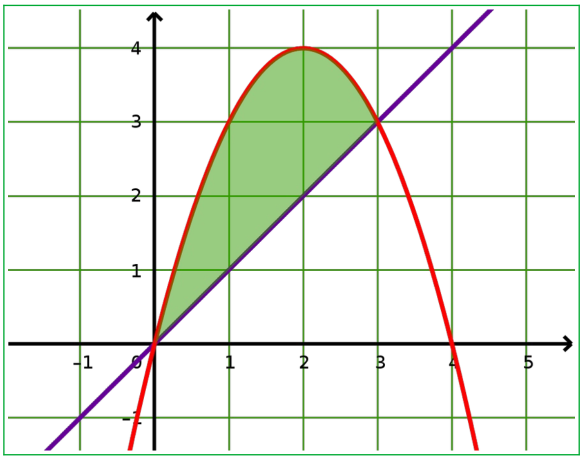
Igualando los numeradores:

$$4x - 1 = a(x-1) + b(x+2) \longrightarrow \begin{cases} \text{si } x = -2 \to -9 = -3a \to a = 3 \\ \text{si } x = +1 \to 3 = 3b \to b = 1 \end{cases}$$

Resulta:

$$\int \frac{4x-1}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{3}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = 3\ln|x+2| + \ln|x+1| + C$$

EJERCICIO 4:



a) Vamos primero a hallar los puntos de corte de las dos gráficas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones:

parábola $y = 4x - x^2$ con recta $y = x$

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = 4x - x^2 \end{array}\right\} \xrightarrow{igualando} x^2 - 3x = 0$$

Resolviendo y sustituyendo obtenemos que se cortan en los puntos $(0\,,0)$ y $(3\,,3)$.

La gráfica (parábola y recta) es sencilla obtenerla con dos tablas de valores, teniendo en cuenta los dos puntos de corte.

b) Observemos que el área entre ambas viene dada por la integral de la función superior ($y = 4x - x^2$) menos la inferior ($y = x$) entre $x = 0$ y $x = 3$:

$$\int_0^3 (3x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2} = 4.5 \quad [u^2]$$

EJERCICIO 5:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(D) = -k^2 + k + 6 \ \rightarrow\ -k^2 + k + 6 = 0 \ \rightarrow\ k = \frac{-1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} \nearrow \ k = -2 \\ \searrow \ k = 3 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{llll} \text{Si } k = -2 \text{ ó } k = 3 & \rightarrow & \det(D) = 0 & \rightarrow \text{ No existe } D^{-1} \\ \text{Si } k \neq -2 \text{ y } k \neq 3 & \rightarrow & \det(D) \neq 0 & \rightarrow \text{ Sí existe } D^{-1} \end{array}$$

b) Según lo anterior, para $k = 2$ es D invertible y podemos despejar así la matriz X :

$$X \cdot D = D^t \ \rightarrow\ X = D^t \cdot D^{-1}$$

Calculamos la inversa:

$$\left.\begin{array}{l} \det(D) = -2^2 + 2 + 6 = 4 \\ \\ \mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Efectuamos las operaciones:

$$X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -14 & -3 & 14 \\ 38 & 9 & -42 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6:

a) Para discutir, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -m^2 + 1 \xrightarrow{|C|=0} \rightarrow m = \pm 1$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq \pm 1$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = -1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\operatorname{rg}(C) = 2 \neq \operatorname{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\operatorname{rg}(C) = \operatorname{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema determinado por el menor principal Δ_2, con x e y como incógnitas principales y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{r} 3x - y = +1 + z \\ -x - y = -1 - z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = t$ y reduciendo obtenemos la solución:

$$(x\,,y\,,z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t\,,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t\,,t\right) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 7:

a) Obtenemos la ecuación de la recta r perpendicular al plano π (lleva la dirección del vector normal) que pasa por P y calculamos el punto Q intersección de r con π (proyección):

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 - \ \ \lambda \\ y = \ \ \ 1 + 2\lambda \\ z = \ \ \ 1 + 2\lambda \end{array} \right\} \mapsto \pi : -(-1-\lambda) + 2\,(1+2\lambda) + 2\,(1+2\lambda) + 4 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1$$

Es:

$$Q = (0\,,-1\,,-1)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q:

$$\frac{P+P'}{2} = Q \;\to\; P' = 2Q - P \;\to\; P' = (1,-3,-3)$$

a) Puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $y = z = 0 \;\mapsto\; \pi : -x + 4 = 0 \;\to\; x = 4 \;\to\; A = (4\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $x = z = 0 \;\mapsto\; \pi : 2y + 4 = 0 \;\to\; y = -2 \;\to\; B = (0\,,-2\,,0)$

Corte con eje Z: $x = y = 0 \;\mapsto\; \pi : 2z + 4 = 0 \;\to\; z = -2 \;\to\; C = (0\,,0\,,-2)$

El área del $\triangle ABC$ es la mitad de la del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} - 8\vec{k} = (4\,,-8\,,-8)$$

Así:

$$A\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 8^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6 \quad (\mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 8:

a) Para calcular la proyección Q de $A\,(3\,,1\,,2)$ sobre r, lo expresamos en función de un parámetro:

$$r : \frac{x+2}{-1} = y - 1 = z - 6 \to \begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{cases} \to Q = (-2-\lambda\,,1+\lambda\,,6+\lambda)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{AQ} \perp \vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \;\to\; (-5-\lambda\,,\lambda\,,4+\lambda) \cdot (-1\,,1\,,1) = 0 \;\to\; 5 + \lambda + \lambda + 4 + \lambda = 0 \;\to\; \lambda = -3$$

Tenemos así que

$$Q = (1\,,-2\,,3)$$

b) Ante todo, observemos que si la recta está contenida en el plano, su punto $P_r = (-2\,,1\,,6)$ está en el plano y su vector director $\vec{v}_r = (-1\,,1\,,1)$ está en la dirección del plano. Así tenemos para el plano:

Punto: $A\,(3\,,1\,,2)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{P_rA} = (5\,,0\,,-4)$, $\vec{v}_r = (-1\,,1\,,1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 5 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando:

$$4x - y + 5z - 21 = 0$$