| | |
|---|---|
| ***Nombre***:______________________________________________ ***Curso***:_____ | |
| *Matemáticas II – Examen Final – 28/05/2021* | |

EJERCICIO 1:

Sea la función $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) [1] Analice su continuidad.

b) [1] Estudie su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$

c) [0,5] Halle la ecuación de su recta tangente para $x = 1$.

EJERCICIO 2:

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

a) [1] Obtenga los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión para $x = 0$ y que presenta un extremo relativo en el punto $(-1, 3)$.

b) [1,5] Si $a = 0$ , $b = -3$ , $c = 1$ analice su monotonía. ¿Cuáles son los valores extremos en $I = [0, 5]$?

EJERCICIO 3:

Obtén la integral

$$I = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} \,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x = 1 + t^2$

EJERCICIO 4:

Obtén la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{4x+3}{x^2 - 3x} \,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

a) [1,5] Obtengamos la siguiente integral indefinida:

$$\int (x-2)\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

b) [1] Calcula el área que forma la curva $y = (x-2)\,\mathrm{e}^x$ con el eje de abscisas entre $x = 0$ y $x = 3$.

EJERCICIO 6:

a) [1,5] Dibuja y halla el área del recinto delimitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $2x - y - 5 = 0$.

b) [1] Calcula

$$\int_0^3 |2x - 4| \,\mathrm{d}x$$

Todo: 1-2 + 4-6 + 7-8 + 10-11

EJERCICIO 7: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de $a$ y $b$ para que se verifique $C \cdot B^t = A$.

b) [1,25] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - 2\,\mathrm{I} = A^2$.

c) [0,5] Halla una matriz $Y$ tal que $A + 2Y = B \cdot B^t$.

EJERCICIO 8: Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a-1 \\ 2x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discútelo según los valores del parámetro $a$.

b) [1] Resuelve el sistema para $a = 2$ y obtenga una solución con $x + y = 2$, si es que existe alguna.

EJERCICIO 9: Consideremos los vectores

$$\vec{u} = (2\,,1\,,0)\ ,\ \vec{v} = (1\,,0\,,-1)\ ,\ \vec{w} = (a\,,b\,,1)$$

a) [1,5] Halle $a$ y $b$ sabiendo que los tres son linealmente dependientes y que $\vec{u} \perp \vec{w}$.

b) [1] Para $a = 1$, ¿cuándo el volumen del paralelepípedo formado por dichos vectores será de 6 unidades cúbicas?

EJERCICIO 10: Consideremos el punto y el plano definidos por

$$P\,(1\,,-1\,,1) \quad , \quad \pi : 2x - y + 2z + 4 = 0$$

a) [1,25] Halla el simétrico del punto $P$ respecto del plano $\pi$.

b) [1,25] Calcula el área del triángulo que determina el plano con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 11: Consideremos el punto y la recta

$$A\,(1\,,2\,,3) \quad , \quad r : x - 1 = y - 6 = \frac{z+2}{-1}$$

a) [1,5] Calcula las coordenadas de la proyección de $A$ sobre $r$.

b) [1] Halla la ecuación del plano que contiene al punto $A$ y a la recta $r$.

EJERCICIO 12: Consideremos las rectas

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = -1 - 2\lambda \\ y = \ \ 0 \\ z = \ \ 2 + \ \lambda \end{array}\right. \quad , \quad s : \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 + \mu \\ z = 4 - \mu \end{array}\right.$$

a) [0,5] Estudiemos su posición relativa.

b) [1,5] Calculemos los respectivos puntos en sendas rectas que están a la menor distancia posible. ¿Cuál es esa distancia?

c) [0,5] ¿Cuál es la ecuación de la recta secante y perpendicular común a ambas?

Todo: 1-2 + 4-6 + 7-8 + 10-11

EJERCICIO 1:

a) CONTINUIDAD:

Sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en este punto:

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$

Límites: $$\lim_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0+) = 0^2 + 0 + 1 = 1 \\ f(0-) = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = \dfrac{e^0}{1} = 1 \end{cases}$$

Concluimos que es continua para $x = 0$.

DERIVABILIDAD:

Podemos aplicar directamente las reglas de derivación para $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$, como $f$ es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$f'(0-) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{e^x} + x\,e^x - \cancel{e^x}}{2\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\,e^x}{2\,\cancel{x}} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$f'(0+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

Concluimos al no coincidir que $f$ no es derivable para $x = 0$, habiendo un punto anguloso.

b) La ecuación de la tangente para $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \;\rightarrow\; y - 3 = 3(x-1) \;\rightarrow\; y = 3x$$

EJERCICIO 2:

a) Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \;\rightarrow\; f''(x) = 6x + 2a$$

Para $x = 0$ hay inflexión: $f''(0) = 0 \;\rightarrow\; 2a = 0 \;\rightarrow\; a = 0$

Para $x = -1$ hay extremo: $f'(-1) = 0 \;\rightarrow\; 3 + 0 + b = 0 \;\rightarrow\; b = -3$

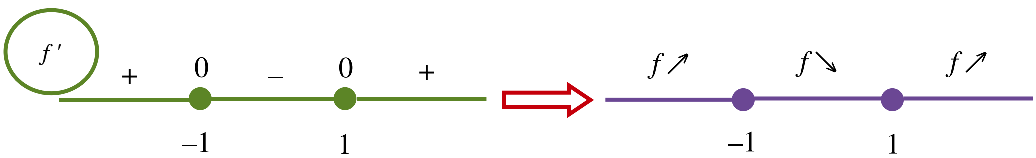
Punto $(-1, 3)$: $f(-1) = 3 \;\rightarrow\; -1 + 3 + c = 3 \;\rightarrow\; c = 1$

Concluimos así que

$$a = 0\,,\; b = -3\,,\; c = 1$$

b) Primero derivaremos y hallaremos los ceros de la derivada:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 1$$




Los extremos absolutos (máximo y mínimo) de una función derivable, en un intervalo compacto, se alcanzan o en los bordes del intervalo o en los ceros de la derivada.

Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

| $x$ | 0 | | 1 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | $\searrow$ | –1 | $\nearrow$ | 111 |

Mínimo absoluto: $(1\,,-1)$
Máximo absoluto: $(5\,,111)$

EJERCICIO 3:
Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x = 1 + t^2 \to \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{\sqrt{t^2}}{t^2+1} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(2t^2\right) : \left(t^2+1\right) \;\to\; \begin{cases} c = 2 \\ r = -2 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int \left(2 + \frac{-2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t = 2t - 2\arctan t + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt{x-1}$:

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C$$

EJERCICIO 4:

$$\int \frac{4x+3}{x^2-3x}\,\mathrm{d}x$$

Observemos que el grado del numerador es menor que el del denominador y que

$$x^2 - 3x = x\,(x-3)$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{4x-3}{x\,(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$4x+3 = a\,(x-3) + bx \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x = 0 \to 3 = -3a \to a = -1 \\ \text{si } x = 3 \to 15 = 3b \to b = 5 \end{cases}$$

Resultando:

$$\int \frac{4x+3}{x^2-3x}\,\mathrm{d}x = I = \int \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x-3}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x-3| - \ln|x| + C$$

EJERCICIO 5:

a) Obtengamos la primitiva siguiente por partes:

$$\int (x-2)\cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = (x-2)\cdot \mathrm{e}^x - \int 1\cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = (x-2)\cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-3)\ \mathrm{e}^x + C$$

b) Ahora calculemos los ceros para ver los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \to (x-2)\cdot \mathrm{e}^x = 0 \begin{array}{l} \nearrow \quad x-2=0 \to x=2 \\ \searrow \quad \mathrm{e}^x = 0 \to x = \text{no} \end{array}$$

Calculamos entonces separadamente, aplicando la Regla de Barrow:

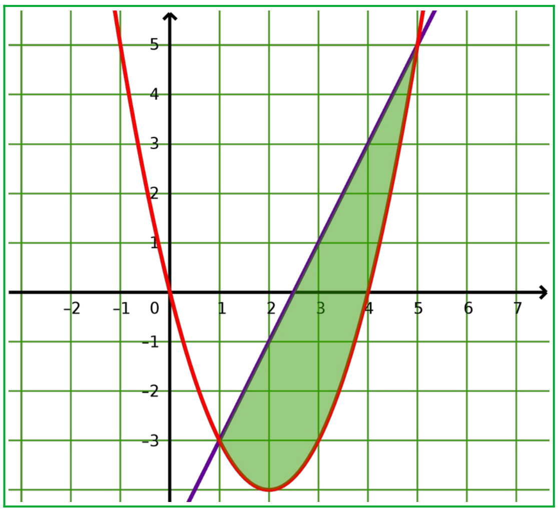
$$I_1 = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(x-3)\cdot \mathrm{e}^x\Big]_{x=0}^{x=2} = -\mathrm{e}^2 + 3 < 0$$

$$I_2 = \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(x-3)\cdot \mathrm{e}^x\Big]_{x=2}^{x=3} = \mathrm{e}^2 > 0 \to A_2 = \mathrm{e}^2 \quad (\ \mathrm{u}^2)$$

Luego el área del recinto, tomando sus valores absolutos es:

$$a(R) = A_1 + A_2 = \mathrm{e}^2 - 3 + \mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e}^2 - 3 \quad (\ \mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 6:




a) Para hallar los puntos de corte de dos gráficas resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$y = x^2 - 4x$ y la recta $2x - y - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x-5 \\ y = x^2 - 4x \end{array}\right\} \xrightarrow{igualando} x^2 - 6x + 5 = 0$$

Resolviendo y sustituyendo obtenemos que se cortan en los puntos $(1\,,-3)$ y $(5\,,5)$.

La gráfica (parábola y recta) es sencilla obtenerla con dos tablas de valores, teniendo en cuenta los dos puntos de corte.

El área viene dada por:

$$a(\mathfrak{R}) = \int_1^5 \left[2x - 5 - \left(x^2 - 4x\right)\right] \mathrm{d}x$$

Ahora, simplificamos y aplicamos la Regla de Barrow:

$$a(\mathfrak{R}) = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_{x=1}^{x=5} = \frac{25}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

b) Expresaremos el integrando como una función a trozos. Es fácil observar que el interior del valor absoluto es cero para $x = 2$, que es negativo para $x < 2$ y positivo para $x > 2$, por ello:

$$|2x-4| = \begin{cases} -2x+4 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Así que separamos la integral en dos y aplicamos Barrow:

$$I = \int_0^2 (-2x+4)\ \mathrm{d}x + \int_2^3 (2x-4)\ \mathrm{d}x = \Big[-x^2+4x\Big]_{x=0}^{x=2} + \Big[x^2-4x\Big]_{x=2}^{x=3} = 4 - 0 + (-3) - (-4) = 5$$

EJERCICIO 7:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz $A$ :

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b-3 & -2a-b-1 \\ -2a+b & -a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} a-2b-3 & = & 2 \\ -2a-b-1 & = & -1 \\ -2a+b & = & -4 \\ -a-2b & = & 3 \end{array} \right| \rightarrow a = 1 \, , \, b = -2$$

b) Si $A$ tiene inversa, podemos despejar la matriz $X$ :

$$X \cdot A - 2\mathrm{I} = A^2 = \rightarrow X \cdot A = 2\mathrm{I} + A^2 \rightarrow X = \left(2\mathrm{I} + A^2\right) \cdot A^{-1}$$

$A$ es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = 6 - 4 = 2 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$2\mathrm{I} - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -20 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -20 & 15 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos $X$ :

$$X = \left(2\mathrm{I} + A^2\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar:

$$A + 3Y = B \cdot B^t \rightarrow 2Y = B \cdot B^t - A \rightarrow Y = \frac{1}{2} \cdot \left(B \cdot B^t - A\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 8:

a) Para discutir, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -a^2 + 3a - 2 \xrightarrow{|C|=0} \rightarrow a = 1 \, , a = 2$$

<u>Caso 1</u>: $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

$S$ es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $a = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{menor} \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlo} \Delta_3^1 = C = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que $S$ es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $a = 2$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{menor} \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlo} \Delta_3^1 = C = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

$S$ es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce además que $S$ equivale al sistema determinado por el menor $\Delta_2$ ($x$ e $y$ incógnitas principales y $z$ como incógnita libre o parámetro):

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 - \ \ z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = t$ y reduciendo obtenemos la solución:

$$(x\,,y\,,z) = (1 - t\,,0\,,t) \quad , \quad t \in R$$

Observemos:

$$x + y = 2 \rightarrow 1 - t = 2 \rightarrow t = -1 \rightarrow (x\,,y\,,z) = (2\,,0\,,2)$$

EJERCICIO 9:

a) Sólo son dependientes cuando

$$\det\,[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}] = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} 0 \rightarrow -a + 2b - 1 = 0 \quad [*]$$

Por otra parte:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow 2a + b = 0 \quad [**]$$

De [*] y [**] obtenemos fácilmente que es $a = -\dfrac{1}{5}$ y $b = \dfrac{2}{5}$.

b) El volumen señalado es el valor absoluto del producto mixto, así:

$$\det\,[\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}] = 2b - 2 \rightarrow |2b - 2| = 6 \begin{array}{l} \nearrow \ 2b - 2 = +6 \rightarrow b = 4 \\ \searrow \ 2b - 2 = -6 \rightarrow b = -2 \end{array}$$

EJERCICIO 10:

a) Obtenemos la ecuación de la recta $r$ perpendicular al plano $\pi$ (lleva la dirección del vector normal) que pasa por $P$ y calculamos el punto $Q$ intersección de $r$ con $\pi$ (proyección):

$$\left. \begin{array}{rl} x = & 1 + 2\lambda \\ y = & 1 - \ \ \lambda \\ z = & 1 + 2\lambda \end{array} \right\} \mapsto \pi : 2\,(1 + \lambda) - (-1 - \lambda) + 2\,(1 + 2\lambda) + 4 = 0 \ \rightarrow \ 9\lambda + 9 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1$$

Es:

$$Q = r \cap \pi = (-1\,,0\,,-1)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es $Q$:

$$\frac{P+P'}{2} = Q \;\rightarrow\; P' = 2Q - P \;\rightarrow\; P' = (-3\,,1\,,-3)$$

a) Puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $y = z = 0 \;\mapsto\; \pi: 2x + 4 = 0 \;\rightarrow\; x = -2 \;\rightarrow\; A = (-2\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $x = z = 0 \;\mapsto\; \pi: -y + 4 = 0 \;\rightarrow\; y = 4 \;\rightarrow\; B = (0\,,4\,,0)$

Corte con eje Z: $x = y = 0 \;\mapsto\; \pi: 2z + 4 = 0 \;\rightarrow\; z = -2 \;\rightarrow\; C = (0\,,0\,,-2)$

El área del $\triangle ABC$ es la mitad de la del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 8\vec{k} = (-8\,,4\,,-8)$$

Así:

$$A\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 4^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6 \quad (\mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 11:

$$A\,(1\,,2\,,3) \quad , \quad r: x - 1 = y - 6 = \frac{z+2}{-1}$$

a) Para calcular la proyección $Q$ de $A\,(1\,,2\,,3)$ sobre $r$ usaremos el método del punto genérico:

$$r: x - 1 = y - 6 = \frac{z+2}{-1} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = \;\; 1 + \lambda \\ y = \;\; 6 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \rightarrow Q = (1 + \lambda\,, 6 + \lambda\,, -2 - \lambda)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{AQ} \perp \vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \;\rightarrow\; (\lambda\,, 4 + \lambda\,, -5 - \lambda) \cdot (1\,,1\,,-1) = 0 \;\rightarrow\; \lambda + 4 + \lambda + 5 + \lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = -3$$

Tenemos así que

$$Q = (-2\,,3\,,1)$$

b) Ante todo, observemos que si la recta está contenida en el plano, su punto $P_r = (1\,,6\,,-2)$ está en el plano y su vector director $\vec{v}_r = (1\,,1\,,-1)$ está en la dirección del plano. Así tenemos para el plano:

Punto: $A\,(1\,,2\,,3)$.

Vectores directores: $\overrightarrow{P_rA} = (0\,,4\,,-5)$, $\vec{v}_r = (1\,,1\,,-1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando y simplificando:

$$x - 5y - 4z + 21 = 0$$

EJERCICIO 12:

$$r:\begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = \quad 0 \\ z = \quad 2+\quad\lambda \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} x = 2 \\ y = 1+\mu \\ z = 4-\mu \end{cases}$$

a) Consideremos sus vectores directores $\vec{v}_r = (-2\,,0\,,1)$ y $\vec{v}_s = (0\,,1\,,-1)$. Es

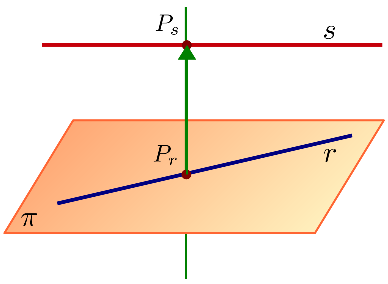
$$\frac{-2}{-0} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1} \;\rightarrow\; \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$$

Tenemos por lo anterior que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos un punto de cada recta $P_r = (-1\,,0\,,2)$ y $P_s = (2\,,1\,,4)$ y calculamos

$$\Delta = \det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow \text{se cruzan}$$

a) [Método del doble punto genérico] Expresemos cada punto en función de un parámetro y obtengamos el vector que determinan:

$$\left.\begin{array}{l} P = (-1-2\lambda\,,0\,,2+\lambda) \\ Q = (2\,,1+\mu\,,4-\mu) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3+2\lambda\,,1+\mu\,,2-\lambda-\mu)$$




La distancia mínima se obtiene cuando $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_s$, así:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r = -5\lambda-\mu-4 = 0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_s = \lambda+2\mu-1 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{resu} \lambda = -1\,,\ \mu = 1$$

Tenemos así que

$$P = (1\,,0\,,1)\ ,\ Q = (2\,,2\,,3)\ ,\ \overrightarrow{PQ} = (1\,,2\,,2)$$

b) La distancia entre las dos rectas es :

$$\mathrm{d}\,(r\,,s) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3 \quad [u]$$

c) La *copersecante* (común perpendicular secante) es la recta que pasa por $P$ y $Q$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$$