***Nombre*:____ *Curso*:_____**	
Matemáticas II – Geometría del Espacio – 18/05/2021	

EJERCICIO 1:

Sean r y s las rectas dadas por

$$r : \begin{cases} x - z = a \\ y + 3z = 1 \end{cases} \quad , \quad s : x - 3 = \frac{y}{-1} = z - 1$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de esas dos rectas.

b) [1,25] Para $a = 0$, halla la ecuación del plano que contiene a la primera y es paralela a la segunda.

EJERCICIO 2:

Consideremos el punto y la recta siguientes

$$P\,(1\,,-7\,,1) \quad , \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \ \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

a) [2] Determina el simétrico de P respecto de r.

b) [0,5] Halla la ecuación de la recta secante perpendicular a r trazada desde P.

EJERCICIO 3:

Consideremos los puntos y el plano

$$P\,(-2\,,5\,,1) \quad , \quad \pi : 3x - 4y + 1 = 0$$

a) [1,5] Averigua las coordenadas del punto de π más cercano a *P*.

b) [0,5] Si trazamos una recta paralela al plano por *P*, ¿qué distancia separa la recta del plano?

c) [0,5] ¿Qué ángulo forma el plano π con la recta que une el origen de coordenadas y el punto *P*?

EJERCICIO 4:

Consideremos la recta y el plano dados por

$$P\,(1\,,-1\,,1) \quad , \quad \pi : 2x - y + 2z + 4 = 0$$

a) [1,25] Halla la ecuación del plano paralelo a π que diste 2 unidades de P.

b) [1,25] Obtén el área del triángulo que determina el plano π con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 1:

Antes de nada, vamos a pasar la recta r a paramétricas:

$$r : \begin{cases} x - z = a \\ y + 3z = 1 \end{cases} \xrightarrow{z=\lambda} \quad r : \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

a) Consideremos sus vectores directores $\vec{v}_r = (1\,,-3\,,1)$ y $\vec{v}_s = (1\,,-1\,,1)$. Es

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-3}{-1} \neq \frac{1}{1} \;\rightarrow\; \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s \;\rightarrow\; r \nparallel s$$

Tenemos por lo anterior que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos un punto de cada recta $P_r = (a\,,1\,,0)$ y $P_s = (3\,,0\,,1)$ y calculamos

$$\Delta = \det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 3-a & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 4 \;\rightarrow\; 2a - 4 = 0 \;\rightarrow\; a = 2$$

Tenemos entonces dos casos:

$$a = 2 \;\rightarrow\; \Delta = 0 \;\rightarrow\; \text{coplanarias} \;\rightarrow\; \text{secantes}$$
$$a \neq 2 \;\rightarrow\; \Delta \neq 0 \;\rightarrow\; \text{no coplanarias} \;\rightarrow\; \text{se cruzan}$$

b) Tomamos el punto $P_r = (0\,,1\,,0)$ y como vectores de dirección $\vec{v}_r = (1\,,-3\,,1)$ y $\vec{v}_s = (1\,,-1\,,1)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{operando} -2x + 2z = 0 \;\rightarrow\; x - z = 0$$

EJERCICIO 2:

a) Primero vamos a calcular el punto proyección (Q) de $P = (1\,,-7\,,0)$ sobre r, usando el método del punto genérico.

Expresamos Q en función de un parámetro:

$$Q = (1 + 2\lambda\,, 3 - \lambda\,, 1)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{PQ} = (2\lambda\,, 10 - \lambda\,, 1) \perp \vec{v}_r = (2\,,-1\,,0)$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \;\rightarrow\; (2\lambda\,, 10 - \lambda\,, 1) \cdot (2\,,-1\,,0) = 0 \;\rightarrow\; 5\lambda - 10 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 2$$

Tenemos así que $Q = (5\,,1\,,1)$.

Como el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ es Q:

$$\frac{P + P'}{2} = Q \;\rightarrow\; P' = 2Q - P \;\rightarrow\; P' = (9\,,9\,,1)$$

b) La recta *persecante* pasa por $P = (1\,,-7\,,0)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{PQ} = (4\,,8\,,0)$:

$$PQ : \frac{x-1}{4} = \frac{y+7}{8} = \frac{z-1}{0}$$

EJERCICIO 3:

a) Primero calcularemos la ecuación de la recta r que pasa por el punto P y que es perpendicular al plano π. Así el punto proyección Q es la intersección de r con π (es el punto del plano más cercano).

La recta r pasa por $P\,(-2\,,5\,,1)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n}=(3\,,-4\,,0)$:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=-2+3\lambda \\ y=5-4\lambda \\ z=1 \end{array}\right.$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$P_r\ \mapsto\ \pi: -6+9\lambda-20+16\lambda+1=0\ \rightarrow\ 25\lambda-25=0\ \rightarrow\ \lambda=1$$

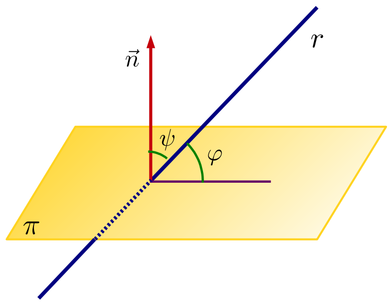
Resulta:

$$Q=(1\,,1\,,1)$$

b) La distancia que separa una recta y un plano paralelos es la distancia desde un punto cualquiera de la recta al plano. En nuestro caso:

$$\mathrm{d}\,(r\,,\pi)=\mathrm{d}\,(P\,,\pi)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}=5\ \mathrm{u}$$

c) Para hallar el ángulo que forman la recta con el plano calcularemos primero el que forman el vector director de la recta $\vec{v}=\overrightarrow{PO}=(2\,,-5\,,1)$ con el vector normal del plano $\vec{n}=(3\,,-4\,,0)$:



$$\cos\psi=\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}=\frac{26}{5\sqrt{30}}\ \rightarrow\ \varphi=\arccos\frac{26}{5\sqrt{30}}=18^\circ 18' 26''$$

Luego el ángulo formado entre r y π:

$$\varphi=90^\circ-18^\circ 18' 26''=71^\circ 41' 34''$$

EJERCICIO 4:

a) Si el plano es paralelo a $\pi: 2x-y+2z+4=0$, su ecuación será

$$\pi': 2x-y+2z+d=0$$

Ahora, usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano, obtendremos d:

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi')=\frac{|2+1+2+d|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=2\ \rightarrow\ \frac{|5+d|}{3}=2\ \rightarrow\ |5+d|=6$$

Para que un valor absoluto resulte ser 6, su argumento debe ser 6 o -6. Por lo tanto:

$$|5+d|=6\ \rightarrow\ \left|\begin{array}{lllll} 5+d=+6 & \rightarrow & d=1 & \rightarrow & \pi'_1=2x-y+2z+1=0 \\ 5+d=-6 & \rightarrow & d=-11 & \rightarrow & \pi'_2=2x-y+2z-11=0 \end{array}\right.$$

b) Puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $y=z=0\ \mapsto\ \pi: 2x+4=0\ \rightarrow\ x=-2\ \rightarrow\ A=(-2\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $x=z=0\ \mapsto\ \pi: -y+4=0\ \rightarrow\ y=4\ \rightarrow\ B=(0\,,4\,,0)$

Corte con eje Z: $x=y=0\ \mapsto\ \pi: 2z+4=0\ \rightarrow\ z=-2\ \rightarrow\ C=(0\,,0\,,-2)$

El área de $\triangle ABC$ es la mitad de la del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 8\vec{k} = (-8\,,4\,,-8)$$

Así:

$$A\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+4^2+8^2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6 \text{ u}^2$$