Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Geometría – 17/05/2021	

EJERCICIO 1:

Sean r y s las rectas dadas por

$$r: \left\{ \begin{array}{r} x = 4 \\ y + z = 5 \end{array} \right. \quad , \quad s: \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = b \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de ambas rectas según el valor de b.

b) [1,25] Halla la ecuación del plano que contiene a r y a s cuando $b = 5$.

EJERCICIO 2:

Consideremos el punto y la recta siguientes

$$P\,(1\,,1\,,0) \quad , \quad r: \left\{ \begin{array}{r} x + z = 1 \\ y = 2 \end{array} \right.$$

a) [1,5] Determina el punto de r más cercano a P. ¿A qué distancia se encuentran?

b) [0,5] Halla la ecuación de la recta secante perpendicular a *r* trazada desde *P*.

c) [0,5] Si trazamos una recta *s* paralela a *r* por el punto *P*, ¿qué distancia separa las rectas *r* y *s*?

EJERCICIO 3:

Consideremos los puntos y el plano

$$A\,(5\,,2\,,0) \quad , \quad B\,(3\,,3\,,-2) \quad , \quad \pi : 4x + 3y + z = 0$$

a) [1,5] Averigua las coordenadas del punto simétrico de A respecto de π.

b) [1,25] Halla la medida (grados minutos segundos) del ángulo que determinan la recta AB y el plano π.

EJERCICIO 4:

Consideremos la recta y el plano dados por

$$r: \frac{x+1}{3} = y = \frac{z}{-2} \quad , \quad \pi : 2x + 3y + z - 12 = 0$$

a) [1,25] Calcula las coordenadas de los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es de $\sqrt{14}$ unidades.

b) [1,25] Obtén el área del triángulo que determina el plano π con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 1:

Antes de nada, vamos a pasar la recta r a paramétricas:

$$r:\left\{\begin{array}{r} x=4 \\ y+z=5 \end{array}\right. \xrightarrow{z=\mu} r:\left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=5-\mu \\ z=\quad\mu \end{array}\right.$$

a) Consideremos sus vectores directores $\vec{v}_r=(0\,,-1\,,1)$ y $\vec{v}_s=(-1\,,0\,,1)$. Es

$$\frac{0}{-1}\neq\frac{-1}{0}\neq\frac{1}{1}\ \to\ \vec{v}_r\nparallel\vec{v}_s$$

Tenemos por lo anterior que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos un punto de cada recta $P_r=(4\,,5\,,0)$ y $P_s=(3\,,b\,,1)$ y calculamos

$$\Delta=\det[\overrightarrow{P_sP_r}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix} -1 & b-5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5-b$$

Tenemos entonces dos casos:

$$b=5\ \to\ \Delta=0\ \to\ \text{coplanarias}\ \to\ \text{secantes}$$
$$b\neq5\ \to\ \Delta\neq0\ \to\ \text{no coplanarias}\ \to\ \text{se cruzan}$$

b) Para $b=5$ son coplanarias: el plano que las contiene está determinado por un punto cualquiera de ellas, como es $P_r=(4\,,5\,,0)$, y por $\vec{v}_r=(0\,,-1\,,1)$ y $\vec{v}_s=(-1\,,0\,,1)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\ \xrightarrow{operando}\ -x-y-z+9=0$$

EJERCICIO 2:

a) Es el punto proyección (Q) de $P=(1\,,1\,,0)$ sobre r. Vamos a usar el método del punto genérico.

Expresamos Q en función de un parámetro:

$$r:\left\{\begin{array}{r} x+z=1 \\ y=2 \end{array}\right. \xrightarrow{z=\lambda} \left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=2 \\ z=\quad\lambda \end{array}\right. \to Q=(1-\lambda\,,2\,,\lambda)$$

Queremos que sea $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}_r=0\ \to\ (-\lambda\,,1\,,\lambda)\cdot(-1\,,0\,,1)=0\ \to\ 2\lambda=0\ \to\ \lambda=0$$

Tenemos así que $Q=(1\,,2\,,0)$.

b) La recta *persecante* es la recta:

$$PQ:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}$$

c) La distancia entre dos rectas paralelas es la distancia desde un punto cualquiera de ellas a la otra recta. En nuestro caso:

$$\mathrm{d}\,(r\,,s)=\mathrm{d}\,(P\,,r)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1\ \mathrm{u}$$

EJERCICIO 3:

a) Brevemente: primero calcularemos la ecuación de la recta r que pasa por el punto A y que es perpendicular al plano π. A continuación calcularemos el punto Q intersección de r con π (proyección). Y ya hallaremos el simétrico A' teniendo en cuenta que el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ es Q.

La recta r pasa por $A\,(5\,,2\,,0)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n}=(4\,,3\,,1)$:

$$r:\begin{cases} x = 5+4\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = \quad\ \ \lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$P_r \mapsto \pi : 20+16\lambda+6+9\lambda+\lambda=0 \rightarrow \lambda=-1$$

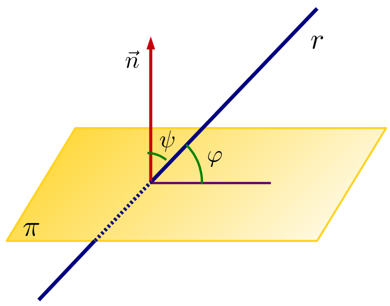
Es:

$$Q=(1\,,-1\,,-1)$$

Como el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ es Q:

$$\frac{A+A'}{2}=Q \rightarrow A'=2Q-A \rightarrow A'=(-3\,,-4\,,-2)$$

b) Para hallar el ángulo que forman la recta con el plano calcularemos primero el que forman el vector director de la recta $\vec{v}=\overrightarrow{BA}=(2\,,-1\,,2)$ con el vector normal del plano $\vec{n}=(4\,,3\,,1)$:



$$\cos\psi=\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}||\vec{n}|}=\frac{7}{3\sqrt{26}} \rightarrow \varphi=\arccos\frac{7}{3\sqrt{26}}=27°13'57''$$

Luego el ángulo formado entre r y π:

$$\varphi=90°-27°13'57''=62°46'3''$$

EJERCICIO 4:

a) Expresando la recta en paramétricas tenemos que ese punto debe ser:

$$P=(-1+3\lambda\,,\lambda\,,-2\lambda)$$

Ahora, usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano, obtendremos λ:

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi)=\frac{|6\lambda-2+3\lambda-2\lambda-12|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14} \rightarrow |7\lambda-14|=14$$

Para que un valor absoluto resulte ser 14, su argumento debe ser 14 o -14. Por lo tanto:

$$|7\lambda-14|=14 \rightarrow \left|\begin{array}{lllll} 7\lambda-14=+14 & \rightarrow & \lambda=0 & \rightarrow & P_1=(-1\,,0\,,0) \\ 7\lambda-14=-14 & \rightarrow & \lambda=4 & \rightarrow & P_2=(11\,,4\,,-8) \end{array}\right.$$

b) Puntos de corte del plano con los ejes coordenados:

Corte con eje X: $\quad y=z=0 \mapsto \pi : 2x-12=0 \rightarrow x=6 \rightarrow A=(6\,,0\,,0)$

Corte con eje Y $\quad x=z=0 \mapsto \pi : 3y-12=0 \rightarrow y=4 \rightarrow B=(0\,,4\,,0)$

Corte con eje Z: $\quad x=y=0 \mapsto \pi : z-12=0 \rightarrow z=12 \rightarrow C=(0\,,0\,,12)$

El área del $\triangle ABC$ es la mitad de la del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 48\vec{\imath} + 72\vec{\jmath} + 24\vec{k} = (48\,,72\,,24)$$

Así:

$$A\,(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{48^2 + 72^2 + 24^2} = \frac{\sqrt{8064}}{2} = 12\sqrt{14} \quad (\mathrm{u}^2)$$