Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 25/03/2021

EJERCICIO 1: [2]

Escribe y resuelve matricialmente el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left.\begin{aligned} x + (\lambda+1)\, y = -2 \\ (1+\lambda)\, x + 3\lambda\ y = -1 \end{aligned}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de λ?

EJERCICIO 2: [4]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (a+2)\, x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & ay & - & z & = & a \end{array}\right\}$$

a) [2,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro a.

b) [1] Resuélvalo para para $a = 1$.

c) [0,5] Para este valor del parámetro, ¿existe alguna solución en la que x se anule?

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + (k+1)\, z = 1 \\ 2x - 2ky + 6z = 3 \end{aligned}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro k.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema y, en caso de ser compatible, su solución?

c) [0,5] Razone si para cierto valor de k es $(1\,,1\,,1\,)$ una solución.

EJERCICIO 4: [1,5]

Plantee razonadamente (identificando <u>claramente</u> las incógnitas y <u>mostrando</u> el origen de cada ecuación) un sistema de ecuaciones lineales que permita dar respuesta al siguiente problema:

“Un vendedor dispone de tres tipos de piensos: A, B y C.

A cierto ganadero le cobra 70 céntimos por cada kilo de una mezcla formada por tres partes de pienso A con una parte de C. A otro ganadero le cobra 60 céntimos el kilo de una mezcla formada a partes iguales con los tres tipos de pienso.

Determine el precio del kilo de cada tipo de pienso sabiendo que la mezcla de un kilo de pienso B y un kilo de pienso C cuesta un 25% más que un kilo de pienso A.”

EJERCICIO 1:

Llamemos C a la matriz de coeficientes, X a la de incógnitas y B a la matriz columna de términos independientes. Expresemos matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas

$$CX = B \to X = C^{-1}B \to X = AB$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Podemos hallar λ sustituyendo en la ecuación segunda, por ejemplo:

$$4 + (\lambda + 1) \cdot (-3) = -2 \to 3\lambda = 3 \to \lambda = 1$$

EJERCICIO 2:

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -a^2 + 1 \xrightarrow{|C|=0} a^2 = 1 \to a = \pm 1$$

<u>Caso 1</u>: $a \neq -1$ y $a \neq 1$.

Como $\Delta_3 = \det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $a = -1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \text{ , } \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\text{rg}(C) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $a = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \text{ , } \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio previo deducimos que para $a = 1$ y que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rl} 3x - y = & 1 + z \\ -x - y = & -1 - z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = t$ y resolviendo (por reducción, cambiando el signo de la ecuación segunda es directo):

$$(x\,, y\,, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t\,, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t\,, t \right)$$

c) Veamos si es posible que sea $x = 0$ en este caso:

$$x = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t = 0 \rightarrow t = -1 \xrightarrow{obtenemos} (x\,, y\,, z) = (0\,, 0\,, -1)$$

EJERCICIO 3:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k+1 & 1 \\ 2 & -2k & 6 & 3 \end{array} \right)$$

a) Partamos de un menor de orden 1 distinto de cero

$$\Delta_1 = |1| \neq 0$$

Sus orlados de orden 2 son:

$$\Delta_2^1 = \left| \begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -2k \end{array} \right| = -2k + 4\ ,\ \Delta_2^2 = \left| \begin{array}{cc} 1 & k+1 \\ 2 & 6 \end{array} \right| = -2k + 4\ ,\ \Delta_2^3 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array} \right| = 1$$

Veamos cuándo es nulo el primer orlado (que coincide con el segundo):

$-2k + 4 = 0 \rightarrow k = 2$

Caso 1: $k = 2$.

Todos los orlados en C son cero pero el orlado en A no ($\Delta_2^1 = \Delta_2^2 = 0\,, \Delta_2^3 = 1 \neq 0$):

$$\text{rg}(C) = 1 \neq \text{rg}(A) = 2$$

Es incompatible.

Caso 2: $k \neq 2$

El primer orlado es distinto de cero ($\Delta_2^1 \neq 0$), por ello:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $k = 2$ se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Si $k \neq 2$ se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

c) Pongamos $x = y = z = 1$

$$\left\{ \begin{array}{r} 1 - 2 + k + 1 = 1 \rightarrow k = 1 \\ 2 - 2k + 6 = 3 \rightarrow k = \dfrac{5}{2} \end{array} \right.$$

Como vemos, es imposible que se cumplan ambas simultáneamente. Así que no hay ningún valor de k que cumpla dichas condiciones. Por ello, no puede ser solución del sistema en ningún caso.

EJERCICIO 4:

Sean x , y, z los respectivos precios (en euros) de cada kilo de pienso A, B y C.

3 kilos de A con 1 kilo de C son 4 kilos de mezcla a 0.70 € el kilo: $3x + z = 4 \cdot 0.7$

1 kilo de A con 1 kilo de B y 1 kilo de C son 3 kilos de mezcla a 0.60 € el kilo: $x + y + z = 3 \cdot 0.60$

1 kilo de pienso B y 1 kilo de pienso C cuesta un 25% más que 1 kilo de A: $y + z = 1.25 \cdot x$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\{3x + z = 2.8\,, x + y + z = 1.8\,, y + z = 1.25x\}$$

Resolviendo:

$$(x\,, y\,, z) = (0.8\,, 0.6\,, 0.4)$$

Así, el kilo de pienso A cuesta 0.80€, el de B cuesta 0.60€ y el kilo de C vale 0.40€.