Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 24/03/2021

EJERCICIO 1: [2]

Escribe y resuelve matricialmente el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left.\begin{array}{r} (\lambda+1)\,x+(\lambda+3)\,y=1 \\ (1-\lambda)\,x-\qquad\lambda\;y=0 \end{array}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de λ?

EJERCICIO 2: [4]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & 2y & + & (a+2)z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 6-a \end{array}\right\}$$

a) [2,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro a.

b) [1] Resuélvalo para para $a=0$.

c) [0,5] ¿Existe alguna solución en la que sea $y=0$?

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} k\,x+4\,y-k\,z=4 \\ x+k\,y-\quad z=3 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro k.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema y, en caso de ser compatible, su solución?

c) [0,5] Razone si para cierto valor de k es $(2\,,-1\,,2\,)$ una solución.

EJERCICIO 4: [1,5]

Plantee razonadamente (identificando <u>claramente</u> las incógnitas y <u>mostrando</u> el origen de cada ecuación) un sistema de ecuaciones lineales que permita dar respuesta al siguiente problema:

“Una tienda ofrece tres tipos de pinturas: interior lisa a cuatro euros el kilo, interior rugosa a un euro menos y exterior a cinco euros el kilo.

Un cliente ha pagado 550€ por los 130 kilos de pintura que se ha llevado.

¿Cuántos kilos de cada clase adquirió si gastó en pintura para exterior un 75% más de lo que le costó la de interior?”

EJERCICIO 1:

Llamemos C a la matriz de coeficientes, X a la de incógnitas y B a la matriz columna de términos independientes. Expresemos matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas

$$CX = B \rightarrow X = C^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Podemos hallar \lambda sustituyendo en la ecuación segunda, por ejemplo:

$$(1-\lambda)\cdot 2 - \lambda \cdot (-1) = 0 \rightarrow -\lambda = -2 \rightarrow \lambda = 2$$

EJERCICIO 2:

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -a^2 + 8a \xrightarrow{|C|=0} a\,(-a+8) = 0 \rightarrow a = 0\,, a = 8$$

Caso 1: $a \neq 0$ y $a \neq 8$.

Como $\Delta_3 = \det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

Caso 2: $a = 8$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 8 & 1 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |\,C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 352 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\text{rg}(C) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$$

Caso 3: $a = 0$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = C| = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio previo deducimos que para $a = 0$ y que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \begin{cases} x = z \\ y = 2 - z \end{cases}$$

Poniendo $z = t$ ya lo tenemos:

$$(x\,,y\,,z) = (t\,,2 - t\,,t)$$

c) Veamos si es posible $y = 0$ en este caso:

$$y = 0 \to 2 - t = 0 \to t = 2 \xrightarrow{obtenemos} (x\,,y\,,z) = (2\,,0\,,2)$$

EJERCICIO 3:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 4 & -k & 4 \\ 1 & k & -1 & 3 \end{array} \right)$$

a) Partamos de un menor de orden 1 distinto de cero

$$\Delta_1 = |1| \neq 0$$

Sus orlados de orden 2 son:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} k & 4 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4\ ,\ \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} k & -k \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ,\ \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} k & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3k - 4$$

Veamos cuándo es nulo el primer orlado:

$$k^2 - 4 = 0 \to k = \pm 2$$

Caso 1: $k = 2$ o $k = -2$

Todos los orlados en C son cero pero el orlado en A no ($\Delta_2^1 = 0\,,\Delta_2^2 = 0\,,\Delta_2^3 = 11 \neq 0$):

$$\mathrm{rg}(C) = 1 \neq \mathrm{rg}(A) = 2$$

Es incompatible.

Caso 2: $k \neq -2$ y $k \neq 2$

El primer orlado es distinto de cero ($\Delta_2^1 \neq 0$), por ello:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce:

Que en el caso 1 se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Que en el caso 2 se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

c) Pongamos $x = 2$, $y = -1, z = 2$:

$$\begin{cases} 2k - 4 - 2k = 4 \to -4 = 4 \\ \quad 2 - k - 2 = 3 \to k = -3 \end{cases}$$

Como vemos, es imposible, pues la primera ecuación no se verifica (para ningún valor de k). Por ello, no puede ser solución del sistema en ningún caso.

EJERCICIO 4:

Llamemos

x al nº de kilos de interior lisa

y al nº de kilos de interior rugosa

z al nº de kilos de exterior

El total de kilos es 130: $x + y + z = 130$

El total de dinero pagado es 550€: $4x + 3y + 5z = 550$

Gasto en exterior un 75% más del gasto en interior: $5z = 1.75\,(4x + 3y)$

Consideremos entonces el sistema formado por esas tres ecuaciones lineales:

$$\{x + y + z = 130\,,\, 4x + 3y + 5z = 550\,,\, 5z = 1.75\,(4x + 3y)\}$$

Resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = (20\,,40\,,70)$$

Así, adquirió 20 kilos de pintura interior lisa, 40 de interior rugosa y 70 kilos de pintura exterior.