Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 12/03/2021

EJERCICIO 1: [3,5]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [1] Halle los valores de a, b y c para que se verifique $B \cdot C^t = A$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + A^2 = 2\mathrm{I}$.

c) [0,5] Halle una matriz Y tal que $A + 2Y = B \cdot B^t$.

d) [0,5] Obtenga A^{50}.

EJERCICIO 2: [2,5]

Considera la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 5 & -2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Averigüe para qué valores de λ tiene inversa.

b) [1] Calcule la inversa para $\lambda = 0$.

c) [0,75] Discuta el rango de D según los valores de λ.

EJERCICIO 3: [2]

Calcula los determinantes propuestos sabiendo que es 3 el determinante de la matriz

$$E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

a) [1] det $\left(E^{-1}\right)$ y det $\left(E + E^t\right)$

b) [1] $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & 4a+c \\ b & d & 4b+e \\ c & e & 4c+f \end{vmatrix}$

EJERCICIO 4: [2]

Discuta el rango de la matriz siguiente según los valores de x.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ x+1 & 0 & 3 & x-2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A :

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b+1 & -c-7 \\ -b+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} -a+2b+1 & = & -1 \\ -c-7 & = & -1 \\ -b+2 & = & 0 \\ 1 & = & 1 \end{array} \right| \rightarrow a=4\,, b=2\,, c=-6$$

b) A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = 1-0 = 1 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$X \cdot A + A^2 = 2\mathrm{I} \rightarrow X \cdot A = 2\mathrm{I} - A^2 \rightarrow X = \left(2\mathrm{I} - A^2\right) A^{-1}$$

Efectuamos las operaciones:

$$X = \left(2\mathrm{I} - A^2\right) A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Es fácil despejar la incógnita: Halla una matriz Y tal que $A + 2Y = B \cdot B^t$.

$$A + 2Y = B \cdot B^t \rightarrow 2Y = B \cdot B^t - A \rightarrow Y = \frac{1}{2} \cdot \left(B \cdot B^t - A\right)$$

Efectuando las operaciones:

$$Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Por inducción llegamos a que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n=50} A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & -50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(D) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow \; \lambda = +3 \\ \searrow \; \lambda = -1 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{llll} \text{Si } \lambda = -1 \text{ ó } \lambda = 3 & \rightarrow \det(D) = 0 & \rightarrow & \text{No existe } D^{-1} \\ \text{Si } \lambda \neq -1 \text{ y } \lambda \neq 3 & \rightarrow \det(D) \neq 0 & \rightarrow & \text{Sí existe } D^{-1} \end{array}$$

b) Según lo anterior, para $\lambda = 0$ es invertible con:

$$\left. \begin{array}{l} \det(D) = -0^2 + 2 \cdot 0 + -3 = -3 \\ \\ \mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -2 & -8 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow D^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 5 & -8 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Teniendo en cuenta el apartado (a) y observando el siguiente menor de orden 2 independiente de λ:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Obtenemos:

$$\begin{array}{lclcl} \lambda \neq -1 \text{ y } \lambda \neq 3 & \rightarrow & \Delta_3 = \det(D) \neq 0 & \rightarrow & \operatorname{rg}(D) = 3 \\ \lambda = -1 \text{ 0 } \lambda = 3 & \rightarrow & \Delta_3 = \det(D) = 0\,, \Delta_2 \neq 0 & \rightarrow & \operatorname{rg}(D) = 2 \end{array}$$

EJERCICIO 3:

a) Como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes, y el producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad, tenemos para el determinante de la inversa:

$$E \cdot E^{-1} = \mathrm{I} \rightarrow |E| \cdot |E^{-1}| = 1 \rightarrow |E^{-1}| = \frac{1}{3}$$

Para el segundo determinante, calculando la suma:

$$\det\left(E + E^t\right) = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

b) Permutemos las dos primeras filas y entonces la segunda fila será la tercera parte de la original:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6$$

$$\Delta_2 = \{c_3 - 4c_1\} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 3$$

EJERCICIO 4:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ x+1 & 0 & 3 & x-2 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la tercera fila:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & 1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\,(x+4)\,(x-2) \quad , \quad \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ x+1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 3\,(x-2)$$

Resumidamente:

$$\begin{array}{lclcl} x \neq 2 & \rightarrow & \Delta_3^2 \neq 0 & \rightarrow & \operatorname{rg}(M) = 3 \\ x = 2 & \rightarrow & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0\,, \Delta_2 \neq 0 & \rightarrow & \operatorname{rg}(M) = 2 \end{array}$$