Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 08/03/2021	

EJERCICIO 1: [3,5]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2b \end{pmatrix}$$

a) [1] Halle los valores de a y b para que se verifique $B \cdot C^t = A$

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X - B \cdot B^t = \mathrm{I}_2$

c) [0,5] Calcule A^{2021}.

d) [0,5] Razone si existe alguna matriz que conmute con B.

EJERCICIO 2: [2,5]

Sea la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores del parámetro m existe D^{-1}.

b) [1] Calcule D^{-1} para $m = 2$.

c) [0,75] Estudie el rango según los valores de m .

EJERCICIO 3: [2]

El determinante de cierta matriz cuadrada E es 5, y sus respectivas columnas son c_1 , c_2 , c_3.

Calcula:

a) [0,5] El determinante de $3E$.

b) [0,75] El determinante cuyas columnas son

$$3c_2 - 2c_3 \ , \ 4c_3 \ , \ c_1$$

c) [0,75] El determinante de una matriz *F* que verificase $F\,E\,F^t = 5\mathrm{I}_3$.

EJERCICIO 4: [2]

Determina el rango de la siguiente matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a+2 \\ 2 & 1 & 8 & -3 \\ -1 & a+1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos el producto e igualamos el resultado a la matriz A :

$$B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2 & 4b-4 \\ a-1 & -2b+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a+2 & = & 1 \;\rightarrow\; a=1 \\ a-1 & = & 0 \;\rightarrow\; a=1 \\ 4b-4 & = & 2 \;\rightarrow\; b=1.5 \\ -2b+3 & = & 1 \;\rightarrow\; b=1 \end{array} \right| \rightarrow \text{No hay solución}$$

Para ningún valor de a y b se verifica $B \cdot C^t = A$

b) Si A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$A \cdot X - B \cdot B^t = I_2 \;\rightarrow\; A \cdot X = I_2 + B \cdot B^t \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot \left(I_2 + B \cdot B^t\right)$$

A es cuadrada y tiene inversa:

$$\det(A) = 1 - 0 = 1 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$I_2 + B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X = A^{-1} \cdot \left(I_2 + B \cdot B^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Las primeras potencias son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Por inducción llegamos a que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n=2014} A^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 4042 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar una matriz M tal que $BM = MB$.

Si existe BM, el número de filas de M debe coincidir con el de columnas de B: M debe tener 3 filas.

Si existe MB, el nº de columnas de M debe coincidir con el de filas de B: M debe tener 2 columnas.

Tendríamos así que BM es 2×2 y que MB es 3×3. Pero entonces $BM \neq MB$.

Concluimos así que no existe ninguna matriz que conmute con B.

EJERCICIO 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(D) = -m^2 + m + 6 \;\rightarrow\; -m^2 + m + 6 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{-1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} \nearrow \quad m = -2 \\ \searrow \quad m = 3 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{llll} \text{Si } \; m = -2 \text{ ó } m = 3 & \rightarrow & \det(D) = 0 & \rightarrow \quad \text{No existe } D^{-1} \\ \text{Si } \; m \neq -2 \text{ y } m \neq 3 & \rightarrow & \det(D) \neq 0 & \rightarrow \quad \text{Sí existe } D^{-1} \end{array}$$

b) Según lo anterior, para $m = 2$ es A invertible.

$$\left. \begin{array}{l} \det(D) = -2^2 + 2 + 6 = 4 \\ \\ \mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow D^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & -1 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) El único menor de orden 3 es el propio determinante de la matriz. Aprovechando (a) y observando el siguiente menor de orden 2, no nulo, que no depende de *m*:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Resulta que:

$$\begin{array}{lllll} \text{Si } \; m = -2 \text{ ó } m = 3 & \rightarrow & \Delta_2 \neq 0 \text{ y } \det(D) = 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}\,(D) = 2 \\ \text{Si } \; m \neq -2 \text{ y } m \neq 3 & \rightarrow & \Delta_3 = \det(D) \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}\,(D) = 3 \end{array}$$

EJERCICIO 3:

a) Aplicamos que "si en un determinante se multiplica una línea por un número todo el determinante queda multiplicado por ese número":

$$\det(3\,E) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \det(E) = 27 \cdot 3 = 135$$

b) Escribamos los determinantes por columnas:

$$\begin{aligned} \Delta &= \det[\; 3c_2 - 2c_3 \quad 4c_3 \quad c_1 \;] = 4\det[\; 3c_2 - 2c_3 \quad c_3 \quad c_1 \;] = 4\det[\; 3c_2 \quad c_3 \quad c_1 \;] \\ &= 12\det[\; c_2 \quad c_3 \quad c_1 \;] = -12\det[\; c_2 \quad c_1 \quad c_3 \;] = +12\det[\; c_1 \quad c_2 \quad c_3 \;] = 12 \cdot 5 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Hemos sacado 4 de la segunda columna, sumado a la primera columna el doble de la segunda, sacado 3 de la primera columna y, finalmente, hemos permutado dos columnas.

c) Teneniendo en cuenta que el determinante de un producto es el producto de los determinantes y que el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$$|F| \cdot |E| \cdot |F| = 125 \rightarrow 5\,|F|^2 = 125 \rightarrow |F| = \pm\sqrt{1}25 \rightarrow |F| = \pm 5$$

EJERCICIO 4:

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a+2 \\ 2 & 1 & 8 & -3 \\ -1 & a+1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la tercera fila:

$$\Delta_3^1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & a+1 & -6 \end{vmatrix}=-4\,(a+1) \quad , \quad \Delta_3^2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & a & 4 \end{vmatrix}=2\,(a+1)\,(a+4)$$

Observando que todos los orlados cero sólo cuando $a=-1$:

$$\begin{array}{lclcl} a\neq -1 & \rightarrow & \Delta_3^1\neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(F)=3 \\ a=-1 & \rightarrow & \Delta_3^1=\Delta_3^2=0\,,\Delta_2\neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(F)=2 \end{array}$$