Nombre:____	***Curso***: 2C1
Matemáticas II – Integral definida –29/01/2021	

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f:(0\,,+\infty)\;\rightarrow\;\mathbb{R}$ definida por $f\,(x)=2\ln{(x)}$.

a) [1] Calcula $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) [1,5] Obtén el área del recinto delimitado por su gráfica y el eje de abscisas en el intervalo $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,,\mathrm{e}\right]$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f\,(x)=|2x-4|$$

a) [1,25] Dibuja el recinto delimitado por su gráfica y la recta de ecuación $x-y+1=0$.

b) [1,25] Halla el área de dicho recinto.

EJERCICIO 3:

a) [1,25] Estudia la monotonía y determina los extremos de la función F definida por

$$F\,(x)=\int_0^x\frac{2\cos{(t)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\quad,\quad x\in[0\,,2\pi]$$

b) [1,25] Sabiendo que

$$\int_0^5 2f=\int_2^5 3f=12$$

calcula razonadamente

$$\int_0^2\left(f\,(x)+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos para $a>0$ la función $f:\mathbb{R}\;\rightarrow\;\mathbb{R}$ definida por

$$f\,(x)=x^2-a\,x$$

a) [0,75] Comprueba que la recta tangente para $x=a$ es

$$y=a\,x-a^2$$

b) [1,75] Halla a para que el área del recinto delimitado por el eje de ordenadas, la gráfica de f y la recta anterior sea $1125\ \mathrm{u}^2$.

EJERCICIO 1:

Hallemos la primitiva de la función por partes:

$$\int 2 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = 2x \ln x - \int 2x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 2x \ln x - 2x + C$$

Vamos ante todo a ver los ceros del integrando:

$$2 \ln x = 0 \ln x = 0 \to x = 1$$

Hemos de calcular separadamente:

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} 2 \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[2x \ln x - 2x\Big]_{x=\frac{1}{\mathrm{e}}}^{x=1} = (2 \ln 1 - 2) - \left(\frac{2}{\mathrm{e}} \ln \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{2}{\mathrm{e}}\right) = -2 + \frac{4}{\mathrm{e}} < 0$$

$$\int_{1}^{\mathrm{e}} 2 \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[2x \ln x - 2x\Big]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = (2\,\mathrm{e} \ln \mathrm{e} - 2\,\mathrm{e}) - (2 \ln 1 - 2) = 0 - (-2) = 2 > 0$$

El área solicitada es la suma de los valores absolutos de las integrales anteriores:

$$a(\mathscr{R}) = 2 - \frac{4}{\mathrm{e}} + 2 = 4 - \frac{4}{\mathrm{e}} \ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 2:

a) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

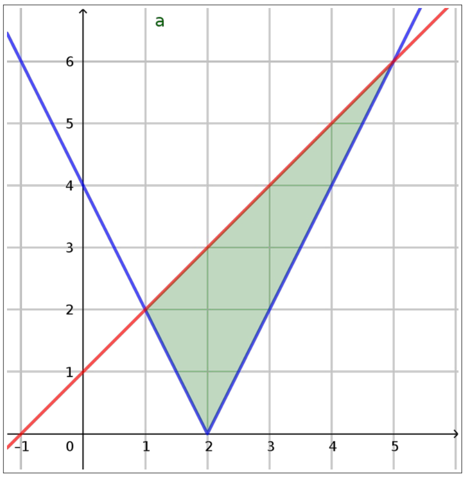
$$2x - 4 = 0 \to x = 2$$

Observando el signo, el valor absoluto queda expresado a trozos así:

$$|2x - 4| = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Pongamos $g(x) = x + 1$. Con unas tablas de valores adecuadas obtenemos el recinto. Comprobamos que las gráficas se cortan para $x = 1$, en el punto $(1\,,2)$, y para $x = 5$, en el punto $(5\,,6)$.

b) Con unas tablas de valores representamos fácilmente las gráficas, denominando $g(x) = x + 1$.



Consideramos el recinto dividido en dos zonas:

Z1: desde $x = 1$ hasta $x = 2$ entre $y = -2x + 4$ e $y = x + 1$

Z2: desde $x = 2$ hasta $x = 5$ entre $y = 2x - 4$ e $y = x + 1$

Calculamos así:

$$\int_{1}^{2} (g - f) = \int_{1}^{2} (3x - 3) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{3x^2}{2} - 3x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_{2}^{5} (g - f) = \int_{2}^{5} (-x + 5) \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + 5x\right]_{x=2}^{x=5} = \frac{9}{2}$$

Luego el área es:

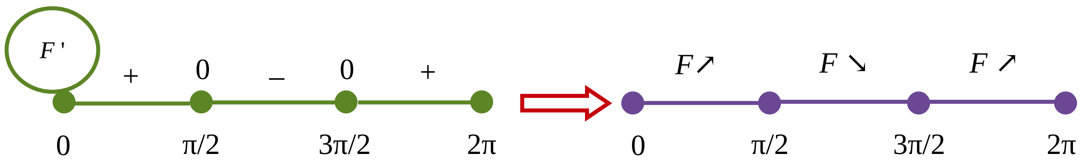
$$a(\mathscr{R}) = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 6 \ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 3:

a) Como el integrando es una función continua (el denominador nunca se anula), el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$F'(x) = \frac{2\cos(x)}{1+x^2}$$

El estudio de signo de la derivada es simple, pues el denominador siempre es positivo. Así que tiene los mismos ceros y el mismo signo que la función coseno:



Aparte de los extremos inicial y final, hay un máximo relativo $x = \pi/2$ y un mínimo relativo para $x = 3\pi/2$.

b) De los datos obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^5 2f = 12 \to \int_0^5 f = 6 \\ \displaystyle\int_2^5 3f = 12 \to \int_2^5 f = 4 \end{array}\right\} \to \int_0^2 f = 6 - 4 = 2$$

Luego la integral pedida es:

$$I = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = 2 + \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\right]_{x=0}^{x=2} = 2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^4 + 3}{2}$$

EJERCICIO 4:

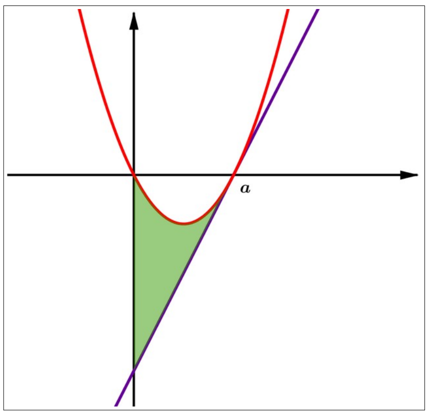
a) Ante todo derivamos

$$f(x) = x^2 - ax \;\to\; f'(x) = 2x - a$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a) \;\to\; y - 0 = a(x-a) \;\to\; y = ax - a^2$$

b) Como son tangentes para $x = a$ y el eje de ordenadas es $x = 0$, para hallar el área del recinto calculamos



$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \left[x^2 - ax - \left(ax - a^2\right)\right]\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^a \left(x^2 - 2ax + a^2\right)\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x\right]_{x=0}^{x=a} = \\ &= \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

Igualando y despejando:

$$\frac{a^3}{3} = 1125 \;\to\; a = \sqrt[3]{3375} = 15$$

Concluimos que es

$$a = 15$$