Nombre:______________________________ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Integral definida –29/01/2021	

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\cos(x)$.

a) [1] Calcula $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) [1,5] Obtén el área del recinto delimitado por su gráfica y el eje de abscisas en el intervalo $[0\,,\pi]$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos las funciones $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \quad , \quad g(x) = x^2 - 4x$$

a) [0,5] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para $x = 4$.

b) [2] Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones junto con dicha tangente y calcula su área.

EJERCICIO 3:

a) [1,25] Estudia la monotonía y determina los extremos de la función F definida por

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x > 0$$

b) [1,25] Calcula

$$\int_0^2 \left(x^2 + |x-1|\right)\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos, para $a > 0$ constante, las funciones $f\,,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 0{,}5\,x^2 \quad , \quad g(x) = a\,x$$

¿Para qué valor de dicha constante el recinto delimitado por sus gráficas tiene un área igual a $144\,\mathrm{u}^2$.

EJERCICIO 1:

Obtengamos la primitiva siguiente por partes:

$$\int \underset{d}{\underline{x}} \cdot \underset{i}{\underline{\cos x}}\, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{sen} x - \int 1 \cdot \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

Primero calculemos los ceros para ver los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \to x \cdot \cos x = 0 \begin{array}{l} \nearrow \quad x = 0 \\ \searrow \quad \cos x = 0 \xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} x = \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

Calculamos entonces separadamente, aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x \operatorname{sen} x + \cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 > 0 \to \mathscr{A}_1 = \frac{\pi}{2} - 1 \quad (\mathrm{u}^2)$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x \operatorname{sen} x + \cos x\Big]_{x=\pi/2}^{x=\pi} = -1 - \frac{\pi}{2} < 0 \to \mathscr{A}_2 = 1 + \frac{\pi}{2} \quad (\mathrm{u}^2)$$

Luego el área del recinto es:

$$a(\mathscr{R}) = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \frac{\pi}{2} - 1 + 1 + \frac{\pi}{2} = \pi \quad (\mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 2:

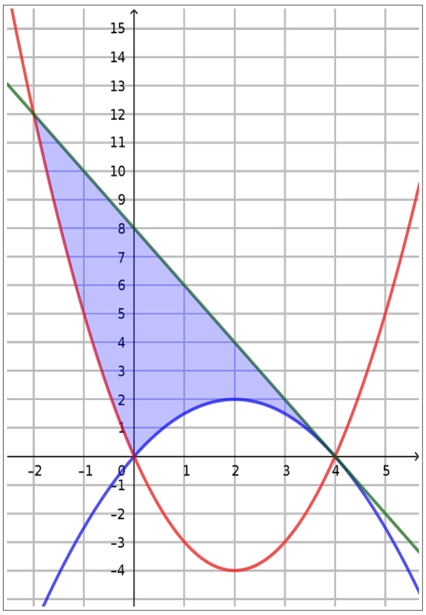
a) Derivamos

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \to f'(x) = -x + 2$$

La recta tangente pedida es:

$$y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4) \to y - 0 = -2 \cdot (x - 4) \to y = -2x + 8$$

b) Las gráficas son dos parábolas y una recta, la tangente, que llamaremos $h(x) = -2x + 8$. Unas tablitas:



x	-2	0	2	4	6
f(*x*)	-6	0	2	0	-6
g(*x*)	12	0	-4	0	12
h(*x*)	12	8	4	0	-4

Observamos que la tangente corta a la gráfica de g para $x = -2$. Así el recinto es el formado por dos zonas:

R1: desde $x = -2$ hasta $x = 0$ entre $y = g(x)$ e $y = h(x)$

R2: desde $x = 0$ hasta $x = 4$ entre $y = f(x)$ e $y = h(x)$

Calculamos así:

$$\int_{-2}^{0} (h - g) = \int_{-2}^{0} \left(-x^2 + 2x + 8\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_{x=-2}^{x=0} = \frac{28}{3}$$

$$\int_0^4 (h - f) = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6} - 2x^2 + 8x\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{32}{3}$$

Luego el área es:

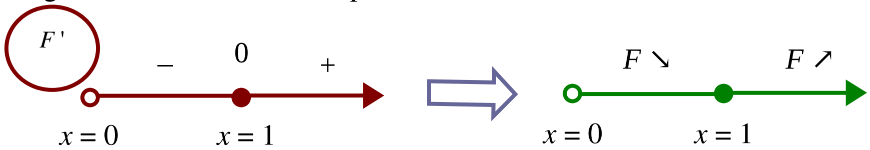
$$a(\mathscr{R}) = \frac{28}{3} + \frac{32}{3} = 20 \ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 3:

a) Como el integrando es una función continua (el denominador nunca se anula y el logaritmo es continuo a partir del cero), el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \quad , \quad x>0$$

El estudio de signo de la derivada es simple:



Deducimos que para $x=1$ hay un máximo absoluto.

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$x-1=0 \to x=1$$

Observando el signo, el valor absoluto queda expresado a trozos así:

$$x^2+|x-1| = \begin{cases} x^2-x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

El separa-fórmulas $x=1$ queda en el intervalo de integración, así que que separamos la integral en dos:

$$\int_0^2 \left(x^2+|x-1|\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2-x+1\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2+x-1\right) \mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_0^2 \left(x^2+|x-1|\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{5}{6}+\frac{17}{6}=\frac{11}{3}$$

EJERCICIO 4:

Las gráficas son una parábola (convexa) y una recta creciente.

Para averiguar dónde se cortan la curva y la recta igualamos sus fórmulas:

$$\frac{1}{2}x^2 = a\,x \;\to\; \frac{1}{2}x^2 - a\,x = 0 \;\to\; x\left(\frac{1}{2}x-a\right)=0 \;\to\; x=0\,, x=2a$$

Calculamos por ello la integral:

$$\int_0^{2a} \left(a\,x-\frac{1}{2}x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{a\,x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{x=2a} = \frac{4a^3}{2}-\frac{8a^3}{6} = 2a^3-\frac{4a^3}{3}=\frac{2a^3}{3}$$

Igualando al área dada obtendremos el valor de la constante:

$$\frac{2a^3}{3}=144 \;\to\; a^3=216 \;\to\; a=6$$