Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 21/12/2020

EJERCICIO 1:

Halla la expresión de la primitiva F de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{3x}-1 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \cos(2x) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(\pi\,,-1)$.

EJERCICIO 2:

Averigua qué función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene como derivada segunda

$$f''(x)=\frac{5}{1+x^2}$$

y presenta un extremo relativo en el punto $P\,(0\,,1)$.

EJERCICIO 3:

Obtén la integral indefinida

$$I=\int\frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x=t^4$

EJERCICIO 4:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int\frac{x+2}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas, indicando $u\,(x)$:

a) $\displaystyle\int x\left(3x^2-1\right)^3\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int\frac{5}{\sqrt{1-49x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 2\tan(3x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int 3\sec^2(5x)\,\mathrm{d}x$

Observación: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse, los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

Llamemos F a la primitiva. Integramos cada trozo:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{3x} - x + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2x) + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el punto $(\pi\,, -1)$:

$$F(\pi) = -1 \;\rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot 0 + b = -1 \;\rightarrow\; b = -1$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$F(0-) = F(0+) \;\rightarrow\; \frac{2}{3} + a = -1 \;\rightarrow\; a = -\frac{5}{3}$$

Definitivamente nos queda

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{3x} - x - \dfrac{5}{3} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,(2x) - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2:

Si tiene un extremo en el punto $(0\,, 1)$ entonces $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$.

La derivada primera es la integral de la derivada segunda:

$$f'(x) = \int \frac{5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 5\arctan x + C$$

Calculemos esa constante:

$$f'(0) = 0 \;\rightarrow\; 0 + C = 0 \;\rightarrow\; C = 0$$

Y la función es la integral de la derivada primera. Lo haremos por partes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \underset{i}{\underline{12}} \cdot \underset{d}{\underline{\arctan x}}\,\mathrm{d}x = 5x \cdot \arctan x - \int 5x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 5x \cdot \arctan x - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 5x\arctan x - \frac{5}{2}\ln\left(1+x^2\right) + D \end{aligned}$$

Calculemos esa constante:

$$f(0) = 1 \;\rightarrow\; 0 - 0 + D = 1 \;\rightarrow\; D = 1$$

Queda:

$$f(x) = 5x\arctan x - \frac{5}{2}\ln\left(1+x^2\right) + 1$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x = t^4 \rightarrow \mathrm{d}x = 4t^3\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{\sqrt{t}}{t^4 + t^2} \cdot 4t^3 \mathrm{d}t = \int \frac{4t^4}{t^2\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(4\,t^2\right) : \left(t^2+1\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} c = 4 \\ r = -4 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int 4\,\mathrm{d}t + \int \frac{-4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4t - 4\arctan t + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $x = t^4 \rightarrow t = \sqrt[4]{x}$:

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\sqrt[4]{x} - 4\arctan \sqrt[4]{x} + C$$

EJERCICIO 4:
El grado del numerador es el menor y no es una logarítmica directa. Veamos los ceros del denominador:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1\,, x = 2$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}\;(*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$x + 2 = a\,(x-2) + b\,(x-1) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x = 1 \rightarrow 3 = -a \rightarrow a = -3 \\ \text{si } x = 2 \rightarrow 4 = +b \rightarrow b = +4 \end{cases}\;(**)$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = 4\ln|x-2| - 3\ln|x-1| + C$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = 3x^2 - 1$:

$$= \frac{1}{6}\int 6x\left(3x^2-1\right)^3\mathrm{d}x = \frac{1}{24}\left(3x^2-1\right)^4 + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 7x$:

$$I = \frac{5}{7}\int \frac{7x}{\sqrt{1-(7x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{7}\,\mathrm{arc\,sen}\,(7x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \cos 3x$:

$$I = -\frac{2}{3}\int \frac{-3\,\mathrm{sen}\,3x}{\cos 3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\ln|\cos 3x| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo tangente con $u = 5x$:

$$I = \frac{3}{5}\int \frac{5}{\cos^2(5x)}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5}\tan(5x) + C$$