Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 21/12/2020

EJERCICIO 1:

Halla la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya derivada viene definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{3x} - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(2x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(\pi, 2)$.

EJERCICIO 2:

Averigua qué primitiva F de la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left(6x^2 + 1\right) \ln x$$

tiene una gráfica que pasa por el punto $P(1, -2)$

EJERCICIO 3:

Obtén la integral indefinida

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+4} \, \mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x = 4t^2$

EJERCICIO 4:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{2x - 19}{x^2 + x - 6} \, \mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas, indicando $u(x)$:

a) $\displaystyle\int \frac{(2 + \ln x)^5}{x} \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1 - 9x^2}} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cot(2x) \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int 2 \csc^2(5x) \, \mathrm{d}x$

Observación: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse, los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

Integramos cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} - x + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -\dfrac{1}{2}\cos(2x) + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el punto $(\pi\,, 2)$:

$$f(\pi) = 2 \;\rightarrow\; -\frac{1}{2}\cdot 1 + b = 2 \;\rightarrow\; b = \frac{5}{2}$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$f(0-) = f(0+) \;\rightarrow\; \frac{1}{3} - 0 + a = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \;\rightarrow\; a = 2 - \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{5}{3}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} - x + \dfrac{5}{3} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -\dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{5}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2:

Es

$$F(x) = \int \underbrace{(6x^2+1)}_{i} \cdot \underbrace{\ln x}_{d}\, \mathrm{d}x = \left(2x^3 + x\right)\cdot \ln x - \int \left(2x^3 + x\right)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(2x^3 + x\right)\cdot \ln x - \int \left(2x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(2x^3 + x\right)\cdot \ln x - \frac{2}{3}x^3 - x + C$$

Calculemos esa constante:

$$F(1) = -2 \;\rightarrow\; 0 - \frac{2}{3} - 1 + C = -2 \;\rightarrow\; C = -\frac{1}{3}$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x = 4t^2 \rightarrow \mathrm{d}x = 8\,t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I = \int \frac{\sqrt{4t^2}}{4 + 4t^2}\cdot 8t\,\mathrm{d}t = \int \frac{16t^2}{4\,(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(4t^2\right) : \left(t^2 + 1\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} c = 4 \\ r = -4 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int 4\,\mathrm{d}t + \int \frac{-4}{1+t^2}\mathrm{d}t = 4t - 4\arctan t + C$$

Deshacemos el cambio con

$$x = 4t^2 \to t^2 = \frac{x}{4} \to t = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

Finalmente

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - 4\arctan\frac{\sqrt{x}}{2} + C$$

EJERCICIO 4:

El grado del numerador es el menor y no es una logarítmica directa. Veamos los ceros del denominador:

$$x^2 + x - 6 = 0 \ \to \ x = -3\,, x = 2$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{2x-19}{(x+3)\,(x-2)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}\ (*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$2x - 19 = a\,(x-2) + b\,(x+3) \ \longrightarrow \ \begin{cases} \text{si } x = -3 \to -25 = -5a \to a = -3 \\ \text{si } x = +2 \to -15 = -5b \to b = +5 \end{cases} (**)$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int \frac{2x-19}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x+3| - 2\ln|x-2| + C$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = 2 + \ln x$:

$$I = \int (2+\ln x)^5 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\,(2+\ln x)^6 + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 3x$:

$$I = \frac{5}{3}\int \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\operatorname{arc\,sen}(3x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \operatorname{sen} 2x$:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} 2x| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo cotangente con $u = 5x$:

$$I = \frac{2}{5}\int \frac{5}{\operatorname{sen}^2(5x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}\cot(5x) + C$$