*Nombre:*____ *Curso:*_____

Matemáticas II – Cálculo Diferencial – 03/12/2020

EJERCICIO 1: [1,25]

Obtengamos las asíntotas de la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x - 2x^2}{x + 1}$$

EJERCICIO 2: [2]

Consideremos la función $f : [0\,, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + 2}$$

Analiza su continuidad y su variación (intervalos de monotonía y extremos).

EJERCICIO 3: [2,5]

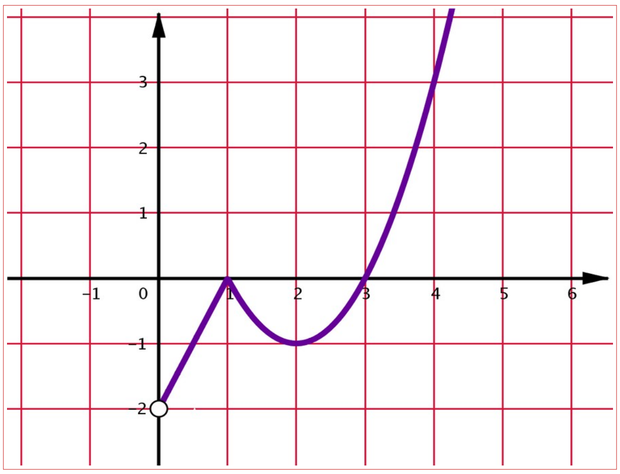
Consideremos la función $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + b\ln(x)$$

a) [1] Determina los valores de a y de b para los que es $(1\,, 4)$ un extremo relativo.

b) [1,5] Para $a = 3$ y $b = 6$, calcula la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de inflexión.

EJERCICIO 4: [2]



Aquí está la gráfica de la derivada de una función $f : (0\,, +\infty) \to \mathbb{R}$.

a) ¿Es la función derivable en todo su dominio? ¿Y dos veces derivable?

b) Determina los intervalos de monotonía de $y = f(x)$ e indica dónde presenta sus extremos relativos.

c) Obtén los intervalos en los que la curva $y = f(x)$ es cóncava o convexa. ¿Tiene puntos de inflexión?

d) ¿En qué punto la tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$?

EJERCICIO 5: [2,25]

Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 15 euros / m² para los laterales y de 30 euros / m² para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 40 euros.

EJERCICIO 1:

Asíntotas verticales: al ser una función racional, sólo es discontinua en los ceros del denominador:

$$x+1=0 \to x=-1$$

Comprobemos si hay salto infinito:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-2x^2}{x+1} = \left[\frac{-3}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que hay una asíntota vertical: $x=-1$.

Asíntotas horizontales: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2x^2}{x+1} \overset{[*]}{=} \pm\infty$$

Concluimos que no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicua: puede haber una oblicua $y=mx+n$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2x^2}{x^2+x} \overset{[*]}{=} -2$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-2x^2}{x+1}+2x\right) \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x+2} \overset{[*]}{=} 3$$

Concluimos que hay una asíntota oblicua para $x\to\pm\infty$:

$$y=-2x+3$$

[*] Regla de los grados

EJERCICIO 2:

a) Primero, derivemos la función:

$$f(x) = ax^2 + b\ln(x) \;\to\; f'(x) = 2ax + \frac{b}{x}$$

Hay extremo en $(1\,,4)$: de ahí se deducen dos cosas:

El punto $(1\,,4)$ está en la gráfica:

$$f(1)=4 \;\to\; a\cdot 1 + b\cdot 0 = 4 \;\to\; a=4$$

Como para $x=1$ hay extremo así:

$$f'(1)=0 \;\to\; 2a+b=0 \xrightarrow{a=4} 8+b=0 \to b=-8$$

b) Primero colocamos los coeficientes y derivamos dos veces:

$$f(x) = 3x^2 + 6\ln(x) \;\to\; f'(x) = 6x+\frac{6}{x} \;\to\; f''(x) = 6-\frac{6}{x^2}$$

Buscamos el punto de inflexión igualando a cero la derivada segunda:

$$6-\frac{6}{x^2}=0 \;\to\; 6=\frac{6}{x^2} \;\to\; 6x^2=6 \;\to\; x^2=1 \xrightarrow{x>0} x=1$$

La tangente pedida es:

$$y-f(1) = f'(1)(x-1) \;\to\; y-3 = 12\cdot(x-1) \to y=12x-9$$

EJERCICIO 3:

La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador:

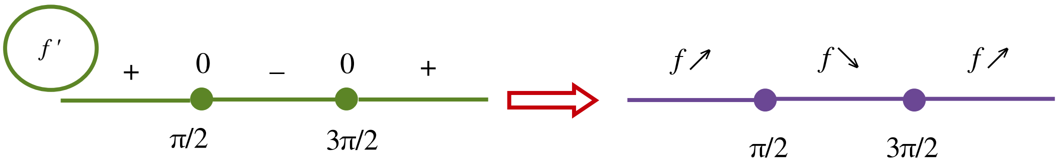
$$\operatorname{sen} x + 2 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = -2 \rightarrow x = \text{NO}$$

Como el denominador nunca es cero (el seno está acotado entre -1 y 1) la función siempre es continua.

Para estudiar la monotonía y los extremos calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{\cos x (\operatorname{sen} x + 2) + \cos x \cdot \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + 2)^2} = \frac{2 \cos x}{(\operatorname{sen} x + 2)^2}$$

Como el denominador es positivo, la derivada tiene los mismos ceros e intervalos de signo que el coseno:



Como vemos, para $x = \dfrac{\pi}{2}$ hay un máximo relativo y para $x = \dfrac{\pi}{2}$ un mínimo relativo.

Pero al ser un intervalo compacto, hay extremos absolutos. Lo vemos en una tabla de variación:

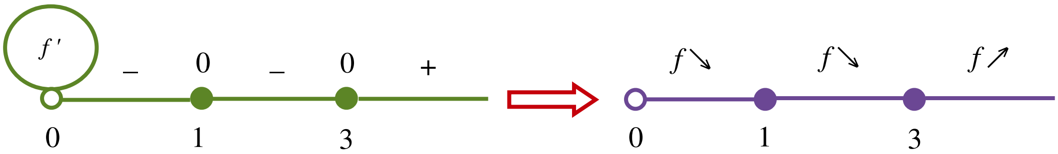
x	0		π/2		3π/2		2π
y	0	↗	1/3	↘	-1	↗	0

El valor mínimo (absoluto) es $y = -1$, para $x = 3\pi/2$, y el valor máximo (absoluto) $y = 1/3$, para $x = \pi/2$

EJERCICIO 4:

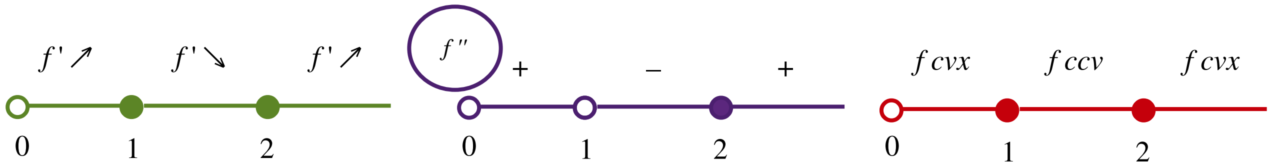
a) Apreciamos que existe $f'(x)$ para todo x del dominio, y se puede derivar dos veces en todo punto salvo $x = 1$, donde $y = f'(x)$ presenta un punto anguloso.

b) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Para $x = 1$ la función f tiene un punto de silla y para $x = 3$ el único extremo relativo, que por ello debe ser un mínimo absoluto.

c) De la monotonía de f' deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:

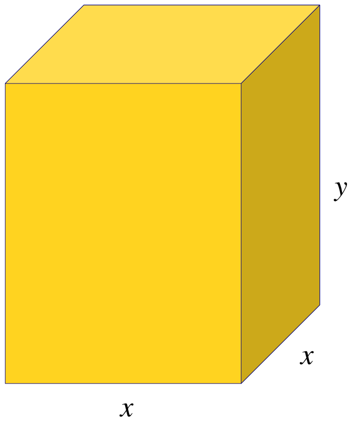


Concluimos que f presenta puntos de inflexión: para $x = 1$ y $x = 2$.

d) La recta dada es $y = 3x + 1$, si la tangente es paralela debe tener la misma pendiente:

$$m = 3 \rightarrow f'(x) = 3 \rightarrow x = 4$$

EJERCICIO 5:



[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamemos x al lado de la base (cuadrada) e y a la altura de la caja.

Queremos maximizar el volumen de la caja:

$$V = x \cdot x \cdot y = x^2 y$$

[Ligadura]

Observemos que la caja (sin tapa) está compuesta de un cuadrado (de área x^2) y de cuatro rectángulos iguales (de área $x \cdot y$). Así:

$$\text{Coste} = 40 \to 30x^2 + 15 \cdot 4xy = 40 \to y = \frac{40 - 30x^2}{60x}$$

[Expresión de la función]

Luego tenemos que <u>maximizar</u> la función volumen:

$$V = x^2 \cdot \frac{40 - 30x^2}{60x} = \frac{40x - 30x^3}{60} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^3$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

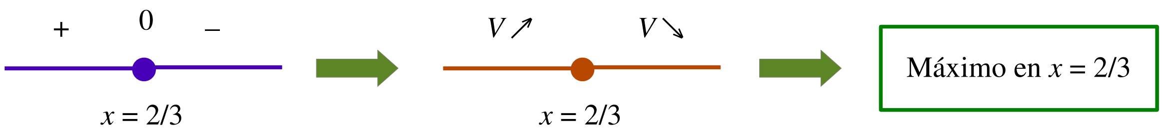
Derivamos

$$V' = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}x^2$$

Igualamos a cero:

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \to \frac{3}{2}x^2 = \frac{2}{3} \to x^2 = \frac{4}{9} \to x = \frac{2}{3}$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de V:



[Conclusión]

Así la caja tiene $\frac{2}{3}$ cm de lado de la base y una altura de $\frac{40 - 30(2/3)^2}{60(2/3)} = \frac{2}{3}$ cm (¡es un cubo!).