*Nombre:*______________________________________ *Curso:*_____	
Matemáticas II – Cálculo Diferencial	

EJERCICIO 1: [2,25]

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo punto.

EJERCICIO 2: [1,25]

Obtén razonadamente las asíntotas de la función f definida mediante

$$f(x)=\frac{2x^2+x-5}{x+2}$$

EJERCICIO 3: [2,25]

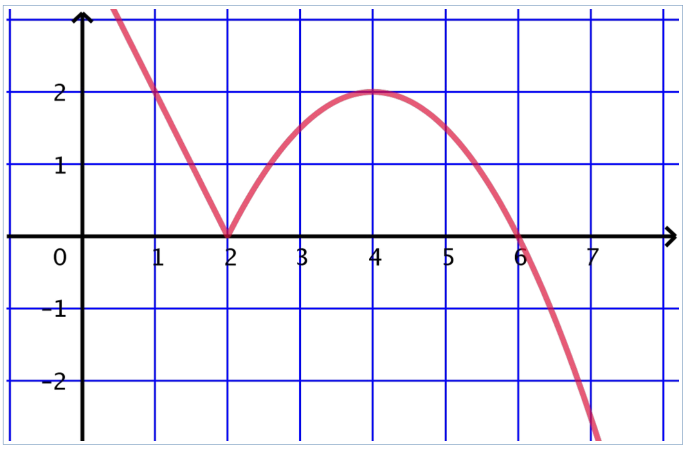
Consideremos la función dada por $f:[0\,,4]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=x^3+ax^2+bx$$

a) [1] Obtén los valores de a y b sabiendo que $(1\,,-1)$ es un punto de inflexión de su gráfica.

b) [1,25] Para $a=-3$ y $b=1$, halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica paralela a $10x-y+1=0$.

EJERCICIO 4: [2]



Aquí está la gráfica de la derivada de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la que sabemos que $f(1)=0$.

a) ¿Es la función derivable en todo punto? ¿Y dos veces derivable?

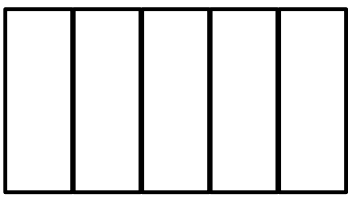
b) Determina los intervalos de monotonía de $y=f(x)$ e indica dónde presenta sus extremos relativos.

c) Obtén los intervalos en los que la curva $y=f(x)$ es cóncava o convexa. ¿Tiene puntos de inflexión?

d) ¿Cuál es la normal a $y=f(x)$ para $x=1$?

EJERCICIO 5: [2,25]

De un terreno se desea vender un solar rectangular de 14700 metros cuadrados dividido en 5 parcelas rectangulares idénticas. Si se quieren vallar tanto los bordes exteriores como las separaciones de las parcelas, determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



EJERCICIO 1:

Continuidad: f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas). Veamos:

Valor: $f(0) = 0 + b = b$

Límites: $f\left(0-\right) = \lim\limits_{x \to 0-} \left(ax + b\right) = b$

$$f\left(0+\right) = \lim_{x \to 0+} \frac{\operatorname{sen}\left(2x\right)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0+} \frac{2\cos\left(2x\right)}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Es continua sólo cuando todo coincide: $b = 2$

Derivabilidad: podemos derivar directamente si $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2x\cos\left(2x\right) - \operatorname{sen}\left(2x\right)}{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Si es continua, puede ser derivable con:

$f'\left(0-\right) = a$

$f'\left(0+\right) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{2\cos 2x - 4x \operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0+} \left(-2\operatorname{sen} 2x\right) = 0$

La función es derivable para $x = 0$ sólo cuando las derivadas laterales coinciden, y eso ocurre para $a = 0$.

Obtenemos:

$$a = 0\,,\; b = 2$$

EJERCICIO 2:

<u>Asíntotas verticales</u>: al ser una función racional, sólo es discontinua en los ceros del denominador:

$$x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$$

Comprobemos si hay salto infinito:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + x - 5}{x + 2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que hay una asíntota vertical: $x = -2$.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x + 2} \overset{*}{=} \pm\infty$$

Concluimos que no hay asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas oblicua</u>: puede haber una oblicua $y = mx + n$.

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2 + x - 5}{x^2 + 2x} \overset{*}{=} 2$

$n = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x^2 + x - 5}{x + 2} - 2x\right) \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x - 5}{x + 2} \overset{[*]}{=} -3$

Concluimos que hay una asíntota oblicua para $x \rightarrow \pm\infty$:

$$y = 2x - 3$$

[*] Regla de los grados

EJERCICIO 3:

a) Primero, derivemos dos veces la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2ax \;\rightarrow\; f''(x) = 6x + 2a$$

Hay inflexión en $(1\,,-1)$: de ahí se deducen dos cosas:

Como para $x = 1$ hay inflexión así:

$$f''(1) = 0 \;\rightarrow\; 6 + 2a = 0 \;\rightarrow\; a = -3$$

El punto $(1\,,-1)$ está en la gráfica:

$$f\,(1) = -1 \;\rightarrow\; 1 - 3 - b = -1 \;\rightarrow\; b = 1$$

b) Veamos la pendiente de la recta dada:

$$r : 10x - y + 1 = 0 \;\rightarrow\; y = 10x + 1 \rightarrow m = 10$$

La pendiente es igual a la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'(x) = m \;\rightarrow\; 3x^2 - 6x + 1 = 10 \;\rightarrow\; \rightarrow\; x = -1\,, x = 3$$

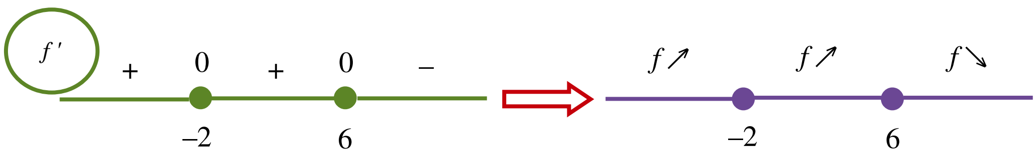
Pero como el dominio es $[0\,,4]$, sólo es válida $x_0 = 3$. La tangente es:

$$y - f\,(3) = f'\,(3)\,(x-3) \;\rightarrow\; y - 3 = 10 \cdot (x-3) \rightarrow y = 10x - 27$$

EJERCICIO 4:

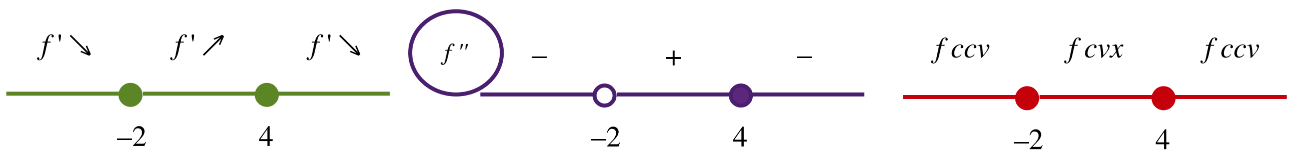
a) Apreciamos que existe $f'\,(x)$ para todo x, y se puede derivar dos veces en todo punto salvo $x = 2$, donde $y = f'\,(x)$ presenta un punto anguloso.

b) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Para $x = -1$ la función f tiene un punto de silla y para $x = 6$ el único extremo relativo, que por ello debe ser un máximo absoluto.

c) De la monotonía de f' deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



Concluimos que f presenta puntos de inflexión: para $x = -2$ y $x = 4$.

d) Si es $f\,(1) = 0$ y en la gráfica de la derivada vemos $f'\,(1) = 2$:

$$y - f\,(1) = -\frac{1}{f'\,(1)}\,(x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot (x-1) \rightarrow y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 5:

[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Llamamos x al largo e y al ancho del solar. Tenemos que minimizar la longitud de la valla:

$$L = 2x + 6y$$

[Ligadura]

Como la superficie es 14700 metros cuadrados:

$$S = 14700 \rightarrow x \cdot y = 14700 \rightarrow y = \frac{14700}{x}$$

[Función]

Queremos maximizar

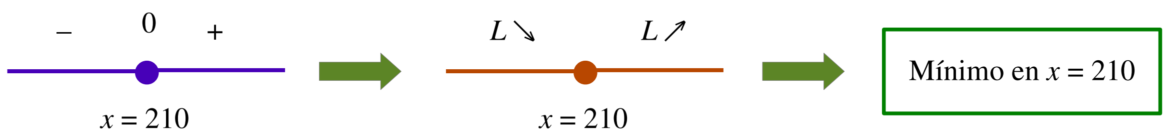
$$L = 2x + 6 \cdot \frac{14700}{x} = 2x + \frac{88200}{x}$$

[Derivada / Extremo]

Derivamos e igualamos a cero:

$$L' = 2 - \frac{88200}{x^2} = 0 \rightarrow 2 = \frac{88200}{x^2} \rightarrow x^2 = 44100 \rightarrow x = 210$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de L:



Luego la parcela rectangular tiene 210 metros de largo y 14700 / 210 = 70 metros de ancho.