Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 08/11/2020	

EJERCICIO 1: [2,5]

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x-2}{x-3} & \text{si} \quad x\le 1\\[2mm] \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) [1,25] Estudia su continuidad y derivabilidad.

b) [1,25] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\left(x^2-4\right) & \text{si} \quad x<2\\ \sqrt{ax+b} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

Halla a y b para que sea derivable en todo su dominio.

EJERCICIO 3: [2,5]

Sea $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$$

a) [1,25] Calcula a y b si la recta tangente a su gráfica para $x=1$ viene dada por $y=2$.

b) [1,25] Para $a=0$ y $b=2$, obtén la ecuación de la tangente a su gráfica que pasa por el punto $P\,(1\,,0)$.

EJERCICIO 4: [2,5]

a) [2] Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\mathrm{e}^{2x}-2x-1}$$

b) [0,5] Consideremos la función definida por:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\mathrm{e}^{2x}-2x-1}\ \text{si } x\neq 0 \quad , \quad f(0)=k$$

¿Para qué valor de k la función es continua en el origen? ¿Qué discontinuidad presenta para los restantes valores de k?

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para para $x = 1$ (separa-fórmulas y cero de denominador), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en éste:

$\boxed{x=1}$

Valor: $f(1) = \dfrac{4-2}{1-3} = -1$

Límites: $f(1-) = -1$

$$f(1+) = \frac{\ln 1}{1-1} = \frac{0}{0} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{1/x}{1} = 1$$

Concluimos que tiene una discontinuidad de salto finito para $x = 1$.

En cuanto a la derivabilidad, podemos derivar derivar cada trozo directamente en su trozo del dominio para $x \neq 1$.

Para $x = 1$, como no es continua no puede ser derivable.

b) <u>Asíntotas verticales</u>: no tiene porque no hay saltos infinitos.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-2}{x-3} = \frac{4}{1} = 4 \quad \to \quad y = 4 \text{ para } x \to -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0 \quad \to \quad y = 0 \text{ para } x \to +\infty.$$

Donde en (*) hemos usado la Regla de L'Hôpital,

EJERCICIO 2:

En primer lugar, como la función es derivable en todo punto, entonces es continua en todo punto. En particular, es continua para $x = 2$ y por ello:

$$f(2_-) = f(2_+) \ \to \ 2\cos 0 = \sqrt{a\cdot 2 + b} \ \to \ \sqrt{2a+b} = 2 \text{ [*]}$$

Como la función es derivable en todo punto, en particular es derivable para $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos\left(x^2-4\right) - 2x^2 \operatorname{sen}\left(x^2-4\right) & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(2_-) = \cos 0 = 1 \\ f'(2+) = \dfrac{a}{2\sqrt{2a+b}} \end{cases}$$

Las derivadas laterales para $x = 2$ deben coincidir:

$$\frac{a}{2\sqrt{2a+b}} = 1 \text{ [**]}$$

Ahora sustituimos en [**] la raíz:

$$\frac{a}{2\sqrt{2a+b}} = 1 \xrightarrow{\sqrt{2a+b}=2} \frac{a}{2\cdot 2} = 1 \ \to \ a = 4$$

Ahora volvemos a [*] y obtenemos ya el valor de b:

$$\sqrt{2\cdot 4 + b} = 2 \ \to \ \sqrt{8+b} = 2 \ \to \ 8 + b = 4 \ \to \ b = -4$$

EJERCICIO 3:

Observemos antes de nada que es:

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x} \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

a) La recta tangente coincide con la función para $x = 1$:

$$f(1) = y(1) \;\rightarrow\; f(1) = 2 \;\rightarrow\; a + b = 2 \text{ [1]}$$

La pendiente de la tangente es la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'(1) = m \;\rightarrow\; a - b = 0 \text{ [2]}$$

Resolviendo { [1] , [2] } tenemos $a = b = 1$

b) Colocamos en lo anterior los valores de los parámetros:

$$f(x) = \frac{2}{x} \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{-2}{x^2}$$

Importante: el punto no está en la curva, desconocemos el punto de tangencia. La tangente será:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \;\rightarrow\; y - \frac{2}{a} = -\frac{2}{a^2}(x - a)$$

Como esa tangente debe pasar por el punto P, sustituimos en ella $x = 1$ e $y = 0$:

$$-\frac{2}{a} = -\frac{2}{a^2}(1 - a) \;\rightarrow\; \frac{-2a^2}{-2a} = 1 - a \;\rightarrow\; a = 1 - a \;\rightarrow\; a = \frac{1}{2}$$

Luego:

$$y - 4 = -8\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = -8x + 8$$

EJERCICIO 4:

a) Calculemos el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^{2x} - 2x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[*]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2e^{2x} - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[*]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x}{4e^{2x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

En [*] hemos aplicado la Regla de L'Hôpital.

b) Según lo anterior:

Si $k = \frac{1}{2}$ entonces valor y límite coinciden y por ello la función es continua para $x = 0$.

Si $k \neq \frac{1}{2}$ entonces existen valor y tendencia, pero no coinciden: hay una discontinuidad evitable (un agujero en la gráfica) para $x = 0$.