Nombre:____ ***Curso***:_____ *Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 29/10/2020*	

EJERCICIO 1: [3,5]

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} a\,\mathrm{e}^{2x}-1 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) [1,5] Determina el valor de a para el que es continua en todo punto.

b) [0,5] ¿Es derivable la función para $x=0$ si $a\neq 3$?

c) [1,5] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función definida mediante

$$f(x)=x\,|x-1|+1$$

a) [0,75] Exprésala como una función polinómica a trozos.

b) [1] Estudia si la gráfica de la función tiene recta tangente en todo punto.

c) [0,75] Obtén la ecuación de la recta normal para $x=-2$.

EJERCICIO 3: [1,5]

Sea $f:[-2\,,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x)=3\sqrt{2x+4}$$

Obtén la ecuación de la recta tangente a su gráfica paralela a la recta $r:3x-4y=0$.

EJERCICIO 4: [2,5]

Calcula según los valores de a el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{3x^2}-a}{x\,\mathrm{sen}\,(4x)}$$

EJERCICIO 1:

a) Cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio (el denominador no se anula porque es $x > 0$ y el argumento del logaritmo es positivo), luego sólo puede ser discontinua para $x = 0$.

Y ahí tenemos

Valor: $f(0) = a - 1$

Límites: $f(0-) = a - 1$

$$f(0+) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Veamos cuándo es igual todo:

$a - 1 = 2 \to a = 3$

Caso $a = 3$: continua (en $x = 0$ y por ello en todo punto)

Caso $a \neq 3$: discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

b) Según lo anterior, para $a \neq 3$ la función no es continua en $x = 0$ y por tanto no es derivable para $x = 0$.

c) Veamos las asíntotas.

<u>Asíntotas verticales</u>: no hay porque sabemos que no tiene saltos infinitos.

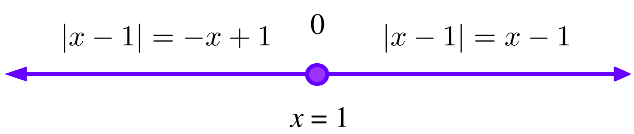
<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito

$$\lim_{x\to -\infty} \left(a e^{2x} - 1\right) = a\, e^{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \qquad y = -1 \quad (x \to -\infty)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LH}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1+2x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \qquad y = 0 \quad (x \to +\infty)$$

EJERCICIO 2:

a) Observemos que $x - 1 = 0 \to x = 1$, que es positivo si $x > 1$ y que es negativo si $x < 1$. Luego



Queda entonces:

$$f(x) = x\,|x-1| + 1 = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

b) CONTINUIDAD: sólo podría ser discontinua para $x = 1$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en este punto:

$\boxed{x=1}$

Valor: $f(1) = -1 - 1 + 1 = 1$

Límites: $\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} f(1-) = -1 + 1 + 1 = 1 \\ f(1+) = 1 - 1 + 1 = 1 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x = 1$ y, por ello, en todo punto.

DERIVABILIDAD: podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para $x=1$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'(1_-) = -2\cdot 1 + 1 = -1 \\ f'(1_+) = 2\cdot 1 - 1 = +1 \end{cases}$$

Como no coinciden, resulta que f no es derivable para $x=1$ (es un punto *anguloso*).

Concluimos que puede trazarse la recta tangente en todo punto salvo para $x=1$.

c) La normal para $x=-2$ es

$$y - f(-2) = -\frac{1}{f'(-2)}(x+2) \to y+5 = -\frac{1}{5}\cdot(x+2)$$

EJERCICIO 3:

$$f(x) = 3\sqrt{2x+4} \ \to \ f'(x) = 3\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x+4}} = \frac{3}{\sqrt{2x+4}}$$

Calculemos la pendiente de la recta dada. Como la tangente ha de ser paralela debe tener la misma:

$$3x - 4y = 0 \to y = \frac{3}{4}x \to m = \frac{3}{4}$$

Y como la pendiente de la tangente es la derivada:

$$f'(x) = m \to \frac{3}{\sqrt{2x+4}} = \frac{3}{4} \to \sqrt{2x+4} = 4 \to 2x+4 = 16 \to x = 6$$

Así, la tangente es:

$$y - f(6) = f'(6)(x-6) \to y - 12 = \frac{3}{4}(x-6)$$

EJERCICIO 4:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{3x^2} - a}{x\,\mathrm{sen}(4x)} = \left[\frac{2-a}{0}\right]$$

Si $a \neq 2$ eso es un límite infinito:

$$L = \left[\frac{2-a}{0}\right] = \pm\infty$$

Si $a = 2$ eso es una indeterminación:

$$L = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[*]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{12x\,\mathrm{e}^{3x^2}}{\mathrm{sen}(4x) + 4x\cos(4x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[*]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{12\,\mathrm{e}^{3x^2} + 12x\,\mathrm{e}^{3x^2}\cdot 6x}{4\cos(4x) + 4\cos(4x) - 4x\,\mathrm{sen}(4x)\cdot 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

En [*] se ha usado la Regla de L'Hôpital.