Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Límites, Continuidad e Introducción a las derivadas – 09/10/2020

EJERCICIO 1: [2,5] Sea

$$f\left(x\right)=\frac{-2x^{2}+3}{x-1}$$

a) [1] Estudia la continuidad de la función.

b) [1,5] ¿Cuáles son las asíntotas de su gráfica?

EJERCICIO 2: [2,5] Consideremos la función f definida por

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^{2}+x-2 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 3x-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia la continuidad de la función.

b) [1] Estudia su derivabilidad, calculando su función derivada.

c) [0,75] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x=0$.

EJERCICIO 3: [3] Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=2x^{2}\,\mathrm{e}^{x}$

b) $y=\dfrac{1-x^{2}}{2x+3}$

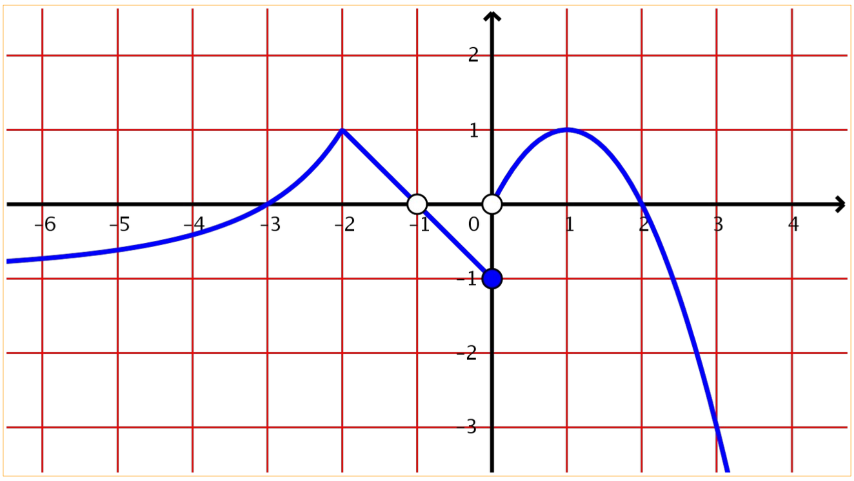
c) $y=\left(2x-5\right)^{7}$

d) $y=\ln\left(4x^{2}-1\right)$

e) $y=\sqrt{\operatorname{sen}x+\cos x}$

f) $y=\mathrm{e}^{-x/2}$

EJERCICIO 4: [2] Consideremos la función cuya gráfica $y=f(x)$ es la dibujada.



a) [0,75] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ la función para $x\to\pm\infty$. ¿Qué asíntotas tiene la gráfica?

c) [0,75] Escribe una tabla de existencia y de signos para la derivada.

EJERCICIO 1:

a) La función sólo puede ser discontinua en *x*=1 que es claramente el único cero del denominador.

Veamos en $x = 1$:

Valor: $f\left(1\right) = \left[\frac{1}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty \left\{ \begin{array}{l} f(1-) = \dfrac{1}{0-} = -\infty \\ f(1+) = \dfrac{1}{0+} = +\infty \end{array} \right\}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = 1$.

b) <u>Asíntota vertical</u> (por el apartado a): $x = 1$

<u>Asíntota horizontal</u>: calculemos los límites en el infinito por la regla de los grados

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2+3}{x-1} = \pm\infty$$

(pues el grado del numerador supera al del denominador). Por ello no hay asíntotas horizontales.

<u>Asíntota oblicua</u>: puede haber una asíntota $y = mx + n$.

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-2x^2+3}{x^2-x} = \dfrac{-2}{1} = -2$ [mismo grado]

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f\left(x\right) - mx\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{-2x^2+3}{x-1} + 2x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-2x+3}{x-1} = \dfrac{-2}{1} = -2$ [mismo grado]

Concluimos que $y = -2x - 2$ es asíntota oblicua.

EJERCICIO 2:

a) f sólo puede ser discontinua para $x = 2$, pues un separador de fórmulas continuas. Veamos en $x = 2$:

VALOR: $f\left(2\right) = 2^2 + 2 - 2 = 4$

TENDENCIAS: $f\left(2-\right) = 2^2 + 2 - 2 = 4$

$f\left(2+\right) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$

Concluimos que es continua en $x = 2$ y, por ello, en todo punto.

b) Podemos derivar directamente si $x \neq 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para $x = 2$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así:

DERIVADAS LATERALES $\begin{cases} f'\left(2-\right) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ f'\left(2+\right) = 3 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 0$ es $y - f\left(0\right) = f'\left(0\right)\left(x - 0\right)$.

Sustituyendo, obtenemos $f\left(0\right) = -2$ y $f'\left(0\right) = 1$. Así que la fórmula nos queda:

$$y + 2 = 1 \cdot (x - 0) \ \to \ y = x - 2$$

EJERCICIO 3:

a) Derivada de un producto:

$$y=2x^2\mathrm{e}^x \;\rightarrow\; y'=4x\cdot\mathrm{e}^x+2x^2\cdot\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\left(2x^2+4x\right)$$

b) Derivada de un cociente:

$$y=\frac{1-x^2}{2x+3}\;\rightarrow\; y'=\frac{-2x\left(2x+3\right)-2\left(1-x^2\right)}{\left(2x+3\right)^2}=\frac{-2x^2-6x-2}{\left(2x+3\right)^2}$$

c) Derivada de una potencia (con regla de la cadena):

$$y=\left(2x-5\right)^7\;\rightarrow\; y'=7\left(2x-5\right)^6\cdot 2=14\left(2x-5\right)^6$$

d) Derivada de un logaritmo (con regla de la cadena):

$$y=\ln\left(4x^2-1\right)\;\rightarrow\; y'=\frac{1}{4x^2-1}\cdot 8x=\frac{8x}{4x^2-1}$$

e) Derivada de una raíz (con regla de la cadena):

$$y=\sqrt{\operatorname{sen}x+\cos x}\;\rightarrow\; y'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}x+\cos x}}\cdot\left(\cos x-\operatorname{sen}x\right)=\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{2\sqrt{\operatorname{sen}x+\cos x}}$$

f) Derivada de una exponencial (con regla de la cadena):

$$y=\mathrm{e}^{-x/2}\;\rightarrow\; y'=-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x/2}$$

EJERCICIO 4:

a) Observamos que es continua en todo punto salvo para $x=-1$ (discontinuidad evitable o de agujero) y para $x=0$ (discontinuidad de salto finito).

En $x=-1$:		En $x=0$:	
Valor:	$f\left(-1\right)=$ no existe	Valor	$f\left(0\right)=-1$
Tendencias:	$f\left(-1-\right)=0$	Tendencias	$f\left(0-\right)=-1$
	$f\left(-1+\right)=0$		$f\left(0+\right)=0$

b) Se ve que la única asíntota que hay es la horizontal de ecuación $y=-1$ ($x\rightarrow-\infty$).

Las tendencias en el infinito son:

$$\text{si } x\rightarrow-\infty \text{ es } y\rightarrow-1 \quad , \quad \text{si } x\rightarrow+\infty \text{ es } y\rightarrow-\infty$$

c) Tenemos en cuenta:

- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa
- que la derivada es cero en los extremos relativos suaves
- que la derivada no existe ni en las discontinuidades ni en los puntos angulosos

Así el esquema de la derivada es: