Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Límites, Continuidad e Introducción a las derivadas – 09/10/2020

EJERCICIO 1: [2,5] Sea

$$f(x) = \frac{3x^2+4}{x-2}$$

a) [1] Estudia la continuidad de la función.

b) [1,5] ¿Cuáles son las asíntotas de su gráfica?

EJERCICIO 2: [2,5] Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x^2+3x+3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia la continuidad de la función.

b) [1] Estudia su derivabilidad, calculando su función derivada.

c) [0,75] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x = 2$.

EJERCICIO 3: [3] Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^4 \, \mathrm{e}^x$

b) $y = \dfrac{x^2+4}{3x-1}$

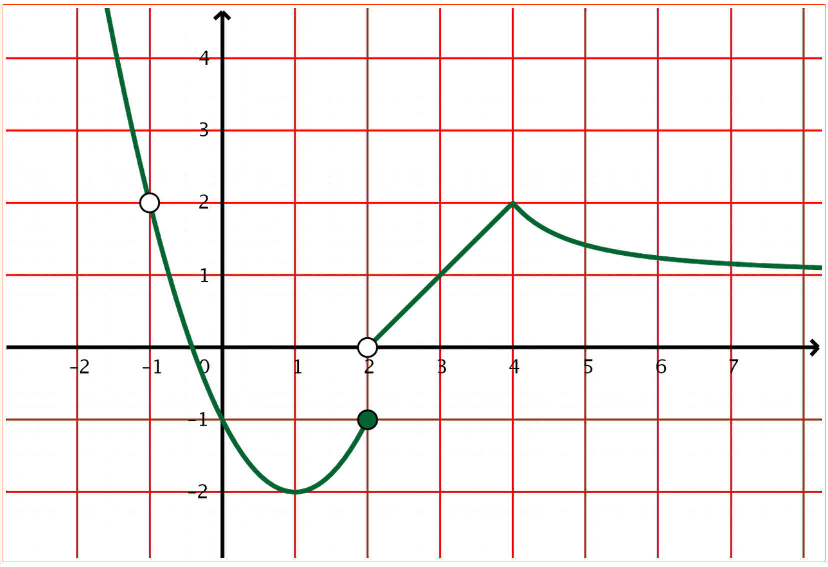
c) $y = \left(3x^4-1\right)^5$

d) $y = \ln\left(x^4-1\right)$

e) $y = \sqrt{2x - \cos x}$

f) $y = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x - x}$

EJERCICIO 4: [2] Consideremos la función cuya gráfica $y = f(x)$ es la dibujada.



a) [0,75] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ la función para $x \to \pm\infty$. ¿Qué asíntotas tiene la gráfica?

c) [0,75] Escribe una tabla de existencia y de signos para la derivada.

EJERCICIO 1:

a) La función sólo puede ser discontinua en x=2 que es claramente el único cero del denominador:

Veamos en $x = 2$:

Valor: $f(2) = \left[\frac{16}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias: $\lim_{x\to 2} f(x) = \left[\frac{16}{0}\right] = \pm\infty \left\{ \begin{array}{l} f(2-) = \frac{16}{0-} = -\infty \\ f(2+) = \frac{16}{0+} = +\infty \end{array} \right\}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = 2$.

b) <u>Asíntota vertical</u> (por el apartado a): $x = 2$

<u>Asíntota horizontal</u>: calculemos los límites en el infinito por la regla de los grados

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+4}{x-2} = \pm\infty$$

(pues el grado del numerador supera al del denominador). Por ello no hay asíntotas horizontales.

<u>Asíntota oblicua</u>: puede haber una asíntota $y = mx + n$.

$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+4}{x^2-2x} = \frac{3}{1} = 3$ [grados iguales]

$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^2+4}{x-2} - 3x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+6x}{x-2} = \frac{6}{1} = 6$ [grados iguales]

Concluimos que $y = 3x + 6$ es asíntota oblicua.

EJERCICIO 2:

a) f sólo puede ser discontinua para $x = 1$, pues un separador de fórmulas continuas. Veamos en $x = 1$:

VALOR: $f(1) = 2\cdot 1 + 3 = 5$

TENDENCIAS: $f(1-) = 2\cdot 1 + 3 = 5$

$f(1+) = -1 + 3 + 3 = 5$

Concluimos que es continua en $x = 1$.

b) Podemos derivar directamente si $x \neq 1$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2 & \text{si} & x < 1 \\ -2x+3 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

Para $x = 1$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así:

DERIVADAS LATERALES $\left\{ \begin{array}{l} f'(1-) = 2 \\ f'(1+) = -2+3 = 1 \end{array} \right.$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 2$ es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$

Sustituyendo, obtenemos $f(2) = 5$ y $f'(2) = -1$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 5 = -(x-2) \;\rightarrow\; y = -x + 7$$

EJERCICIO 3:

a) Derivada de un producto:

$$y = x^{e x} \;\rightarrow\; y' = 4x^3 \cdot \mathrm{e}^x + x^4 \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \left(4x^3 + x^4\right)$$

b) Derivada de un cociente:

$$y = \frac{x^2+4}{3x-1} \;\rightarrow\; y' = \frac{2x\,(3x-1) - 3\left(x^2+4\right)}{(3x-1)^2} = \frac{3x^2-2x-12}{(3x-1)^2}$$

c) Derivada de una potencia (con regla de la cadena):

$$y = \left(3x^4-1\right)^5 \;\rightarrow\; y' = 5\left(3x^4-1\right)^4 \cdot 12x^3 = 60x^3 \cdot \left(3x^4-1\right)^4$$

d) Derivada de un logaritmo (con regla de la cadena):

$$y = \ln\left(x^4-1\right) \;\rightarrow\; y' = \frac{1}{x^4-1} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{x^4-1}$$

e) Derivada de una raíz (con regla de la cadena):

$$y = \sqrt{2x - \cos x} \;\rightarrow\; y' = \frac{1}{2\sqrt{x-\cos x}} \cdot (1 + \operatorname{sen} x) = \frac{1+\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x-\cos x}}$$

f) Derivada de una exponencial (con regla de la cadena):

$$y = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x - x} \;\rightarrow\; y' = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x - x} \cdot (\cos x - 1)$$

EJERCICIO 4:

a) Observamos que es continua en todo punto salvo para $x = -1$ (discontinuidad evitable o de agujero) y para $x = 2$ (discontinuidad de salto finito).

En $x = 2$:	
Valor:	$f\,(2) = -2$
Tendencias:	$f\,(2-) = -1$ $f\,(2+) = 0$

En $x = -1$:	
Valor	$f\,(-1) =$ no existe
Tendencias	$f\,(-1-) = 2$ $f\,(-1+) = 2$

b) No hay asíntota vertical (no hay salto infinito) y se ve que horizontal es $y = 1$ ($x \rightarrow +\infty$).

Las tendencias en el infinito son:

$$\text{si } x \rightarrow -\infty \text{ es } y \rightarrow +\infty \quad , \quad \text{si } x \rightarrow +\infty \text{ es } y \rightarrow 1$$

c) Tenemos en cuenta:

- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa

- que la derivada es cero en los extremos relativos suaves

- que la derivada no existe ni en las discontinuidades ni en los puntos angulosos

Así el esquema de la derivada es: