EJERCICIO 4:

Consideremos el punto y el plano

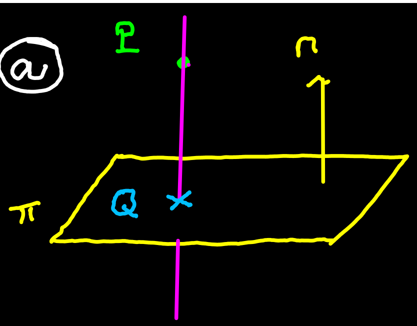
$$P(-1, 2, -1) \quad , \quad \pi : 2x - 2y + z - 2 = 0$$

a) [1,25] Averigua las coordenadas de la proyección P sobre π.

b) [1,25] Obtén la ecuación del plano paralelo a π que dista 2 unidades del punto P.

EXAMEN 22/05/2019

a)



$\boxed{1}$ Recta perpendicular al plano por P.
- Punto: $P(-1,2,-1)$
- Vector: $\vec{v}_r = \vec{n} = (2,-2,1)$

$$r \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Intersección recta-plano (Q):

$$r \xrightarrow{\text{susti}} \pi : 2(-1+2\lambda) - 2(2-2\lambda) - 1 + \lambda - 2 = 0$$

$$-2 + 4\lambda - 4 + 4\lambda - 1 + \lambda - 2 = 0 \longrightarrow 9\lambda - 9 = 0$$

$$\lambda = 1 \xrightarrow{\text{susti}} r \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \boxed{Q = (1,0,0)}$$

b) Será $\pi' : 2x - 2y + z + d = 0$

$$d(P, \pi') = 2 \longrightarrow \frac{|2\cdot(-1) - 2\cdot(2) + (-1) + d|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 2 \rightarrow \frac{|-7+d|}{3} = 2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow |-7+d| = 6 \begin{cases} -7 + d = 6 \rightarrow d = 13 \Rightarrow \boxed{\pi'_1 : 2x - 2y + z + 13 = 0} \\ -7 + d = -6 \rightarrow d = 1 \Rightarrow \boxed{\pi'_2 : 2x - 2y + z + 1 = 0} \end{cases}$$

EJERCICIO 1:

Sean r y s las rectas dadas por

$$r:\begin{cases} y=b \\ z-2x=1 \end{cases}\quad , \quad s:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=3 \\ z=\quad-\lambda \end{cases}$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de ambas rectas según el valor de b.

b) [1,25] Para $b=-1$, halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.

$$r:\begin{cases} x=\quad\mu \\ y=b \\ z=1+2\mu \end{cases}$$

$\vec{v}_r=(1,0,2)$ $\qquad$ $\vec{v}_s=(1,0,-1)$

$P_r=(0,b,1)$ $\qquad$ $P_s=(3,3,0)$

a) $\boxed{1}$ $¿\ \frac{1}{1}=\frac{0}{0}=\frac{2}{-1}\ ?$ No $\Rightarrow \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s \Rightarrow r \nparallel s$ ($\Rightarrow$ secantes o cruzadas)

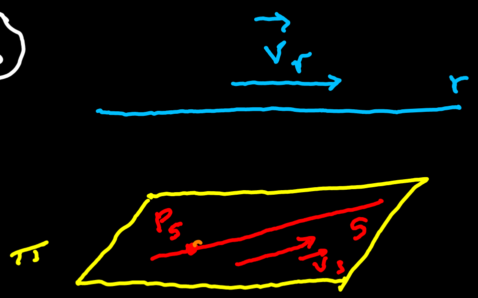
$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1}$

$\boxed{2}$ Calculamos $\Delta=\det[\overrightarrow{P_rP_s}\ \vec{v}_r\ \vec{v}_s]=\begin{vmatrix} 3 & 3-b & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=6-2b+3-b=9-3b=0\rightarrow b=3$

Caso1: $b=3\rightarrow\Delta=0\Rightarrow$ coplanarios $\Rightarrow$ secantes

Caso2: $b\neq3\rightarrow\Delta\neq0\Rightarrow$ no coplanarios $\Rightarrow$ cruzadas (dist. nivel)

b)



Plano $\begin{cases} \text{Punto: } P_s=(3,3,0) \\ \text{Vectores: } \vec{v}_r=(1,0,2),\ \vec{v}_s=(1,0,-1) \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0\rightarrow 2y-6+y-3=0\rightarrow 3y-9=0\rightarrow \boxed{y-3=0}$$

EJERCICIO 3:

Consideremos el punto y la recta siguientes

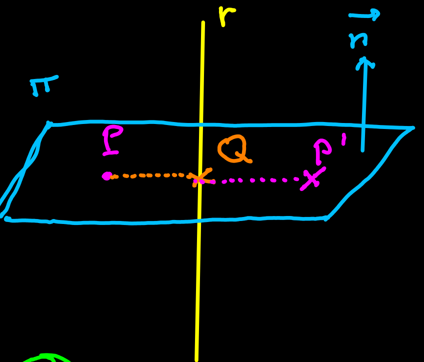
$$P(1,1,-1) \quad , \quad r:\begin{cases} 2x-y=4 \\ y-z=5 \end{cases}$$

a) [1,25] Determina el punto simétrico de P respecto de r .

b) [1,25] Halla la ecuación de la recta secante perpendicular a r trazada desde P.

$$\longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4+2\lambda \\ z = -9+2\lambda \end{cases} \qquad P=(1,1,-1)$$

simétrico (P') $\leftarrow$ proyección (Q) $\leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{plano por } P \\ \perp r \end{array} \right.$



ⓐ $\boxed{1}$ Plano perp. a r por el punto P : $\vec{n} = \vec{v}_r = (1,2,2)$

$\pi: x+2y+2z+d=0 \quad : \quad P \xmapsto{\text{susti}} \pi: 1+2-2+d=0 \to d=-1$

$\pi: \; x+2y+2z-1=0$

$\boxed{2}$ El punto proyección Q es r inter π :

$r \xmapsto{\text{susti}} \pi: \lambda+2(-4+2\lambda)+2\cdot(-9+2\lambda)-1=0 \longrightarrow \lambda=3$

$\lambda=3 \xmapsto{\text{susti}} r: \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=-3 \end{cases} \qquad Q=(3,2,-3)$

$\boxed{3}$ Simétrico P' : punto medio entre P y P' es Q

$\frac{P+P'}{2}=Q \to P+P'=2Q \to P'=2Q-P=(6,4,-6)-(1,1,-1)$

$$\boxed{P'=(5,3,-5)}$$

ⓑ Recta persecante a r por el punto P :

Es la recta PQ

$P(1,1,-1)$

$\vec{PQ}=Q-P=(2,1,-2)$

$$\boxed{PQ: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}}$$

EJERCICIO 2:

Consideremos la recta y el plano dados por

$$r: \frac{x+1}{a} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3} \quad , \quad \pi: -2x+3y-3z+6=0$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de ambos según el valor de a.

b) [1,25] Calcula el área del triángulo que determina el plano con los ejes de coordenadas.

CONDICIÓN PARALELISMO recta-plano

$$Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$$

a) $P_r = (-1,0,-1)$ $\quad \vec{n} = (-2,3,-3)$

$\vec{v}_r = (a,3,3)$

Paralelismo: $-2a + \underbrace{3\cdot 3}_{9} + \underbrace{3\cdot(-3)}_{-9} = 0 \rightarrow -2a = 0 \rightarrow a = 0$

Caso 1: $a = 0 \rightarrow r \parallel \pi$

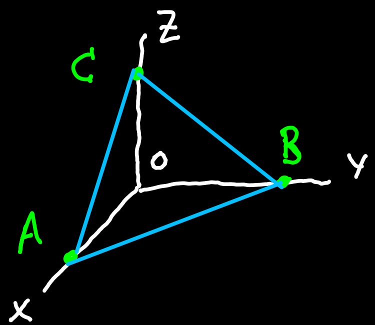
Caso 2: $a \neq 0 \rightarrow r \nparallel \pi \rightarrow$ secantes

¿Paralela contenida o exterior?

$P_r \xmapsto{\text{susti}} \pi: 2+0+3+6 \neq 0$

No está $\Rightarrow$ paralela exterior

b)



$\pi: -2x+3y-3z+6=0$

Corte con eje X: $\{y=0, z=0\} \longrightarrow \pi: -2x+6=0 \rightarrow x=3$ $\quad A(3,0,0)$

Corte con eje Y $\{x=0, z=0\} \longrightarrow \pi: 3y+6=0 \rightarrow y=-2$ $\quad B(0,-2,0)$

Corte con eje Z $\{x=0, y=0\} \longmapsto \pi: -3z+6=0 \rightarrow z=2$ $\quad C(0,0,2)$

$$\text{Sup}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{16+36+36} = \frac{1}{2}\sqrt{88}$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k} = (-4,6,-6)$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\sqrt{88}} \ (u^2)$$