Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 26/04/2019	

EJERCICIO 1: [2]

Escribe y resuelve matricialmente el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left.\begin{aligned} 2x + (\alpha - 2)\, y &= -1 \\ \alpha x + \qquad 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de α?

EJERCICIO 2: [4]

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} ax - y + z & = & 6 \\ x - y - 2z & = & -2a \\ -x + ay + 7z & = & 18 \end{array}\right\}$$

a) [2,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro a.

b) [1] Resuelva el sistema para $a = 2$.

c) [0,5] ¿Hay alguna solución en la que tomen el mismo valor las tres incógnitas?

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{aligned} kx - y - z &= k \\ -4x + ky + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores del parámetro k.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema y, en caso de ser compatible, su solución?

c) [0,5] Razona si para cierto valor de k es $(1\,,1\,,-1\,)$ una solución.

EJERCICIO 4: [1,5]

Plantea un sistema de ecuaciones con el que podamos resolver el siguiente problema:

“Un vendedor dispone de tres consolas de videojuegos: la Xcaja a 200 euros, la Noentiendo al mismo precio y la Juega por 100 euros más. La semana pasada rebajó un 25% el precio de las Noentiendo.

Consiguió vender un total de 9 consolas por 1800 euros. Y gracias a esa oferta, las ventas de Noentiendo duplicaron a las de Juega.

¿Cuántas consolas vendió de cada tipo?”

EJERCICIO 1:

Llamemos C a la matriz de coeficientes, X a la de incógnitas y B a la matriz columna de términos independientes. Expresemos matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas

$$CX = B \to X = C^{-1}B$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Podemos hallar α sustituyendo en la ecuación segunda, por ejemplo:

$$7\alpha + 10 = 3 \to \alpha = -1$$

EJERCICIO 2:

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = 2a^2 - 6a + 4 \xrightarrow{|C|=0} a^2 - 3a + 2 = 0 \to a = 1\,, a = 2$$

<u>Caso 1</u>: $a \neq$ y $a \neq 2$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $a = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 7 & 18 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\;,\; \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 7 & 18 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\text{rg}(C) = 2 \neq \text{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $a = 2$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 7 & 18 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\;,\; \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 18 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio previo deducimos que para $a = 2$ y que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rl} 2x - y = & 6 - \ \ z \\ x - y = & -4 + 2z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = t$ y resolviendo (por reducción, por ejemplo):

$$(x\,, y\,, z) = (10 - 3\,t\,, 14 - 5\,t\,, t)$$

c) Si fuese $x = y$, de la segunda ecuación saldría que $z = a \to x = y = z = a$, sustituyendo en la primera saldría entonces $a^2 = 6$. Y ahora en la tercera nos quedaría

$$a^2 + 6a = 18 \to 6 + 6a = 18 \to a = 2$$

Pero eso es incompatible con $a^2 = 6$. Luego no es posible que las tres incógnitas sean iguales.

EJERCICIO 3:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} k & -1 & -1 & k \\ -4 & k & 2 & 0 \end{array} \right)$$

a) Partamos de un menor de orden 1 distinto de cero y orlemos:

$$\Delta_1 = |-4| \neq 0 \xrightarrow{orlo} \Delta_2^1 = \begin{vmatrix} k & -1 \\ -4 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4\ ,\ \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} k & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2k - 4\ ,\ \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} k & k \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4k$$

Veamos cuándo es nulo el segundo orlado:

$$2k - 4 = 0 \to k = 2$$

Caso 1: $k = 2$.

Los orlados en C son todos cero pero el orlado último (en A) no ($\Delta_2^1 = 0\,, \Delta_2^2 = 0\,, \Delta_2^3 = 8 \neq 0$):

$$\mathrm{rg}(C) = 1 \neq \mathrm{rg}(A) = 2$$

Es un sistema incompatible.

Caso 2: $k \neq 2$

El segundo orlado no es cero ($\Delta_2^2 \neq 0$), por ello:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $k = 2$ se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Si $k \neq 2$ se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

c) Pongamos $x = 1\,, y = 1, z = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{r} k - 1 + 1 = k \to 0 = 0 \ \checkmark \\ -4 + k + 2 = 0 \to k = 2 \end{array} \right.$$

Como vemos, es posible sólo cuando $k = 2$.

EJERCICIO 4:

Sean

x el n.º de consolas Xcaja 200 €

y el n.º de consolas Noentiendo 200 · 0,75 = 150 €

z el n.º de consolas Juega 300 €

Vendió 9 consolas: $x + y + z = 9$ [1]

Total 1800 euros: $200x + 150y + 300z = 1800$ [2]

Las Noentiendo duplicaron las Juega: $y = 2z$ [3]

[RESOLUCIÓN NO SOLICITADA]

Sustituyendo [3] en las dos primeras y simplificando un poquito:

$$\begin{cases} x + 3z &= 9 \\ x + 3z &= 9 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones:

$$(x\,,y\,,z) = (9 - 3\lambda\,,2\lambda\,,\lambda)$$

Pero el número de consolas es un número entero y no puede ser negativo. Así que las soluciones del problema planteado son:

λ	Xcaja	Noentiendo	Juega
0	9	0	0
1	6	2	1
2	3	4	2
3	0	6	3