Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 25/04/2019	

EJERCICIO 1: [2]

Escribe y resuelve matricialmente el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\left.\begin{array}{r} (\lambda+2)\,x - \quad \lambda y = 1 \\ (2\lambda+3)\,x - 2\lambda y = 7 \end{array}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el valor de λ?

EJERCICIO 2: [4]

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} mx - 3y + \quad\quad\quad z & = & 0 \\ x \quad\quad + (m+1)\,z & = & 1 \\ 4x - 3y + \quad\quad\quad 7z & = & m \end{array}\right\}$$

a) [2,5] Discuta el sistema según los valores del parámetro m.

b) [1] Resuelva el sistema para $m = 2$.

c) [0,5] ¿Hay alguna solución en la que tomen el mismo valor las tres incógnitas?

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{r} kx - \quad\quad\quad y + 2z = 3 \\ -2x + (k+1)\,y - 4z = 5 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores del parámetro k.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema y, en caso de ser compatible, su solución?

c) [0,5] Razona si para cierto valor de k es $(1\,,-1\,,0\,)$ una solución.

EJERCICIO 4: [1,5]

Plantea un sistema de ecuaciones con el que podamos resolver el siguiente problema:

"Un vendedor dispone de tres tipos de teléfonos móviles: Foto, Potencia y Total. El modelo Total es un 50% más caro que el Potencia y por el precio de un Total puedes comprar dos Fotos.

Averigua el precio de cada modelo sabiendo que por 650 euros te puedes llevar uno de cada tipo."

EJERCICIO 1:

Llamemos C a la matriz de coeficientes, X a la de incógnitas y B a la matriz columna de términos independientes. Expresemos matricialmente y despejemos la matriz de incógnitas

$$CX = B \to X = C^{-1}B \to X = MB$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Podemos hallar \lambda sustituyendo en la ecuación segunda, por ejemplo:

$$-5\,(\lambda + 2) + 16\lambda = 1 \to 11\lambda = 11 \to \lambda = 1$$

EJERCICIO 2:

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -m^2 + 1 \xrightarrow{|C|=0} 3m^2 - 9m + 6 = 0 \to m = 1\,, m = 2$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq$ y $m \neq 2$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = C = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 14 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 2$.

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = C = 0\ ,\ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio previo deducimos que para $m = 2$ y que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \begin{cases} 2x - 3y = \quad -z \\ x \qquad\quad = 1 - 3z \end{cases}$$

Poniendo $z = t$ y resolviendo:

$$(x\,, y\,, z) = \left(1 - 3t\,, \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\,t\,, t\right)$$

c) Veamos si es posible $x = y = z$ en este caso:

$$x = z \to 1 - 3t = t \to t = \frac{1}{4} \xrightarrow{obtenemos} (x\,, y\,, z) = \left(\frac{1}{4}\,, \frac{1}{4}\,, \frac{1}{4}\right)$$

EJERCICIO 3:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & 2 & 3 \\ -2 & k+1 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

a) Partamos de un menor de orden 1 distinto de cero

$$\Delta_1 = |-2| \neq 0$$

Sus orlados de orden 2 son:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} k & -1 \\ -2 & k+1 \end{vmatrix} = k^2 + k - 2\ ,\ \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} k & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4k + 4\ ,\ \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} k & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5k + 6$$

Veamos cuándo es nulo e segundo orlado:

$$-4k + 4 = 0 \to k = 1$$

Caso 1: $k = 1$.

Todos los orlados en C son cero pero el orlado en A no ($\Delta_2^1 = 0\,, \Delta_2^2 = 0\,, \Delta_2^3 = 11 \neq 0$):

$$\text{rg}(C) = 1 \neq \text{rg}(A) = 2$$

Es incompatible.

Caso 2: $k \neq 1$

El segundo orlado es distinto de cero ($\Delta_2^2 \neq 0$), por ello:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $k = 1$ se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Si $k \neq 1$ se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

c) Pongamos $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$:

$$\begin{cases} k + 1 + 0 = 3 \to k = \quad 2 \\ -2 - (k+1) = 5 \to k = -8 \end{cases}$$

Como vemos, es imposible: no hay ningún valor de *k* que cumpla dichas condiciones. Por ello, no puede ser solución del sistema en ningún caso.

EJERCICIO 4:

Sean

x el precio del modelo Foto

y el precio del modelo Potencia

z el precio del modelo Total

Uno de cada tipo nos costaría 650 euros: $x + y + z = 650$ [1]

Un Total vale como dos Fotos: $z = 2x$ [2]

Un Total vale un 50% más que un Potencia: $z = 1{,}5y$ [3]

[RESOLUCIÓN NO SOLICITADA]

Despejando en [2] y [3] obtenemos $x = \frac{1}{2}z$ e $y = \frac{2}{3}z$. Sustituyendo en la primera:

$$\frac{1}{2}z + \frac{2}{3}z + z = 650 \to \frac{13}{6}z = 650 \to z = 300$$

Ahora basta sustituir para sacar $x = 150$ e $y = 200$.

Tenemos así que el Foto sale a 150 euros, el Potencia a 200 euros y el Total vale 300 euros.