EJERCICIO 1: [2,75]

Consideremos las tres matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determina, si existen, los valores de a, b y c para los que las matrices A y B conmutan.

b) [0,75] Calcula A^2 y deduce cuál es la inversa de A.

c) [0,5] Obtén razonadamente las potencias A^{2017} y A^{2018}.

d) [0,75] Resuelve la ecuación $XA - 2A = \mathrm{I}$.

EJERCICIO 2: [2,75]

Considera

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda \\ -\lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [0,5] Determina los valores de λ para los que C tiene inversa.

b) [1] Estudia el rango de C según los valores de λ.

c) [1,25] Para $\lambda = 0$ halla, si existe, la inversa de DCD^t.

EJERCICIO 3: [2,5]

Sea

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Sabiendo que el determinante de M es 2, calcula razonadamente:

a) [0,5] El determinante de la inversa de M.

b) [0,5] $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ c) [0,75] $\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix}$

d) [0,75] El determinante de la matriz N que verifica $N^2MN = 3M^t$.

EJERCICIO 4: [2]

Estudia el rango de la matriz

$$G = \begin{pmatrix} x-1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & x-1 \\ 2 & 5 & x+2 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Deben ser iguales $A \cdot B$ y $B \cdot A$. Las calculamos e igualamos:

$$AB = BA \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to a = 0\,, b = 0\,, c = -1$$

b) Calculemos y veamos que A cumple la igualdad anterior:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

Se deduce entonces que A es su propia inversa:

$$A \cdot A = \mathrm{I} \to A^{-1} = A$$

c) Veamos las primeras potencias:

$$A^1 = A\ ,\ A^2 = \mathrm{I}\ ,\ A^3 = A^2 A = A\ ,\ A^4 = A^2 \cdot A^2 = \mathrm{I} \ldots$$

Por inducción:

n impar $\to A^n = A \to A^{2017} = A$

n par $\to A^n = \mathrm{I} \to A^{2018} = \mathrm{I}$

d) Para hallar X despejamos:

$$XA - 2A = \mathrm{I} \to XA = \mathrm{I} + 2A \to X = (\mathrm{I} + 2A)\, A^{-1}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(C) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda \ \to\ -\lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) = 0 \begin{array}{l} \nearrow \ \lambda = 0 \\ \searrow \ \lambda = -1 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{lclcl} \text{Si } \ \lambda = -1 \text{ ó } \lambda = 0 & \to & \det(C) = 0 & \to & \text{No existe } C^{-1} \\ \text{Si } \ \lambda \neq -1 \text{ y } \lambda \neq 0 & \to & \det(C) \neq 0 & \to & \text{Sí existe } C^{-1} \end{array}$$

b) Para averiguar el rango (un número entre 1 y 3), ya tenemos el determinante de la matriz. Así:

Caso 1: $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 0$. Es $\Delta_3 = \det(C) \neq 0 \to \mathrm{rg}(C) = 3$

Caso 2: $\lambda = 0$. La matriz es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que el determinante es cero, pero encontramos

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

El mayor orden posible de un menor no nulo es 2. Luego el rango es 2.

Caso 3: $\lambda = -1$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¡Todos los menores de orden 2 son cero! El mayor orden posible de un menor no nulo es 1. Luego el rango es 1.

c) Para $\lambda = 0$ es:

$$DCD^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos E a esa matriz, su inversa es

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

a) Como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes, y el producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad, tenemos:

$$M \cdot M^{-1} = \mathrm{I} \to |M| \cdot |M^{-1}| = 1 \to |M^{-1}| = \frac{1}{2}$$

b) Permutemos las dos primeras filas y entonces la segunda fila será la tercera parte de la original:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6/3 & 0/3 & 3/3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{2}{3}$$

c) Descomponemos en suma de dos, el determinante con dos columnas iguales es cero y “el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta”:

$$\begin{vmatrix} 1 & x+6 & x \\ 2 & y+0 & y \\ 3 & z+3 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 6 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2$$

d) Tomemos determinante en ambos miembros. El determinante de un producto es el producto de los determinantes y el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta:

$$|N^2| \cdot |M| \cdot |N| = |3M^t| \to |N|^2 \cdot 2 \cdot |N| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \to |N|^3 \cdot \cancel{2} = 27 \cdot \cancel{2} \to |N| = \sqrt[3]{27} = 3$$

EJERCICIO 4:

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la primera fila:

$$\Delta_3^1 = \left| \begin{array}{cc|c} x-1 & 3 & 2 \\ \cline{1-2} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & x+2 \end{array} \right| = -x^2 - x + 6 = 0 \to x = -3 \,, x = 2$$

$$\Delta_3^2 = \left| \begin{array}{cc|c} x-1 & 3 & 0 \\ \cline{1-2} 0 & -1 & x-1 \\ 2 & 5 & 1 \end{array} \right| = -5x^2 + 15x - 10 = 0 \to x = 1 \,, x = 2$$

Ambos, simultáneamente, son cero sólo cuando $x = 2$. Por ello se presentan estos casos:

$$\begin{array}{lclcl} x \neq 2 & \rightarrow & \Delta_3^1 \neq 0 \ \text{ o } \ \Delta_3^2 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(G) = 3 \\ x = 2 & \rightarrow & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0\,, \Delta_2 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(G) = 2 \end{array}$$

Nota. Podríamos estudiar separadamente los siguientes casos, aunque no sea preciso: que x sea 2 (rango 1) o que sea 1 (rango 3) o que sea -1 (rango 3) o que sea distinto de estos tres números (rango 3).