Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Integral definida – 13/02/2019

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x \operatorname{sen} x$$

Obtén el área del recinto delimitado por su gráfica y el eje de abscisas en el intervalo $[0\,,2\pi]$.

EJERCICIO 2: [3]

Consideremos las funciones $f\,,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x-1| \quad , \quad g(x) = -x^2 + 4{,}5x + 1$$

a) [1,5] Dibuja el recinto delimitado por ambas, obteniendo los puntos de corte de ambas.

b) [1,5] Halla el área del recinto anterior.

EJERCICIO 3:

a) [1] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función g para $x = 1$, siendo:

$$g(x) = 3 + \int_1^x \frac{\ln t + 4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x > 0$$

b) [1] Sea f una función continua en el intervalo $[0\,,4]$ y F una función primitiva de f tal que $F(0) = -1$ y $F(4) = 3$. Calcula:

$$\int_0^4 (5f(x) - x)\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos para $m > 0$ constante las funciones $f\,,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = m\,x$$

¿Para qué valor de dicha constante el recinto delimitado por sus gráficas tiene un área igual a $\dfrac{4}{3}$ u^2.

EJERCICIO 1:

Primero calculemos los ceros para ver los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \to x \operatorname{sen} x = 0 \xrightarrow{0 \le x \le 2\pi} x = 0\,,\pi\,,2\pi$$

Así que calculamos separadamente las integrales definidas de $x = 0$ hasta $x = \pi$ y de $x = \pi$ hasta $x = 2\pi$.

Obtengamos antes la primitiva siguiente (por partes):

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \underset{d}{x}\,\underset{i}{\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x = -x \cdot \cos(x) + \int 1 \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos(x) + \operatorname{sen} x + C$$

Aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos(x) + \operatorname{sen} x\Big]_{x=0}^{x=\pi} = \pi > 0 \ \to \ \mathscr{A}_1 = \pi \quad (\mathrm{u}^2)$$

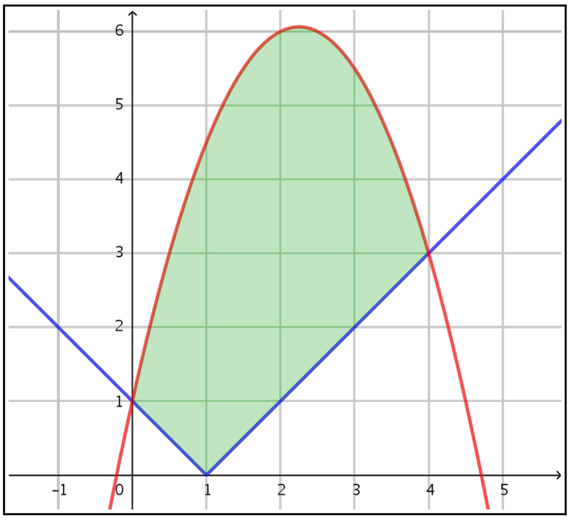
$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos(x) + \operatorname{sen} x\Big]_{x=\pi}^{x=2\pi} = -2\pi - \pi = -3\pi < 0 \ \to \ \mathscr{A}_2 = 3\pi \quad (\mathrm{u}^2)$$

Luego el área del recinto es:

$$a(\mathscr{R}) = \pi + 3\pi = 4\pi \ (\mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 2:

a) Con unas tablas de valores adecuadas obtenemos el recinto. Comprobamos que las gráficas se cortan para $x = 0$, en el punto $(0\,,1)$, y para $x = 4$, en el punto $(4\,,3)$.



b) Observemos que

En $[0\,,1]$ es: $\quad g(x) - f(x) = -x^2 + 4{,}5x + 1 - (-x+1) = -x^2 + 5{,}5x$

En $[1\,,4]$ es: $\quad g(x) - f(x) = -x^2 + 4{,}5x + 1 - (x-1) = -x^2 + 3{,}5x + 2$

Luego el área viene dada por (en unidades de área):

$$\begin{aligned}
\int_0^4 (g-f) &= \int_0^1 \left(-x^2 + 5{,}5x\right)\mathrm{d}x + \int_1^4 \left(-x^2 + 3{,}5x + 2\right)\mathrm{d}x = \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{4}x^2\right]_{x=0}^{x=1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^2 + 2x\right]_{x=1}^{x=4} = \\
&= \frac{29}{12} + \frac{45}{4} = \frac{41}{3}
\end{aligned}$$

EJERCICIO 3:

a) Como el integrando es continuo (el logaritmo lo es en su dominio y el denominador no es cero), el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$g'(x) = \frac{\ln x + 4}{1 + x^2} \quad , \quad x > 0$$

Tenemos que $g(1) = 3 + 0 = 3$ y $g'(1) = \dfrac{4}{2} = 2$.

Deducimos que la ecuación de la recta tangente para $x = 1$ es:

$$y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1) \;\rightarrow\; y - 3 = 2 \cdot (x - 1) \;\rightarrow\; y = 2x + 1$$

b) Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_0^4 (5f(x) - x)\,\mathrm{d}x = \left[5F(x) - \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=4} = \left(5 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 4^2\right) - \left(5 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) = 12$$

EJERCICIO 4:

Las gráficas son una parábola convexa y una recta creciente. Para averiguar dónde se cortan la curva y la recta igualamos sus fórmulas:

$$x^2 = mx \;\rightarrow\; x^2 - mx = 0 \;\rightarrow\; x(x - m) = 0 \;\rightarrow\; x = 0\,, x = m$$

Calculamos la integral:

$$\int_0^m \left(mx - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{m}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=m} = \frac{m^3}{2} - \frac{m^3}{3} = \frac{m^3}{6}$$

Igualando obtendremos el valor de la constante:

$$\frac{m^3}{6} = \frac{4}{3} \;\rightarrow\; m^3 = 8 \;\rightarrow\; m = 2$$