Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Integral definida – 08/02/2019

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$$

Obtén el área del recinto delimitado por su gráfica y el eje de abscisas en el intervalo $[0\,,2]$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x - x^2$$

a) [0,75] Demuestra que la recta $y = 4 - x$ es tangente a la gráfica de f.

b) [1,75] Dibuja y halla el área del recinto limitado por el eje de abscisas, la gráfica de f y la recta tangente anterior.

EJERCICIO 3:

a) [1] Estudia la monotonía y determina los extremos de la función F definida por

$$F(x) = \int_0^x \frac{2-t}{\mathrm{e}^t + 2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

b) [1,5] Calcula

$$\int_1^3 |x^2 - 4|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos para $a > 0$ constante las funciones $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = a\,x^2 \quad , \quad g(x) = 6x$$

¿Para qué valor de dicha constante el recinto delimitado por sus gráficas tiene un área igual a $9\,\mathrm{u}^2$.

EJERCICIO 1:

Primero calculemos los ceros para ver los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas:

$$f(x) = 0 \to (x-1)\,\mathrm{e}^x = 0 \begin{array}{l} \nearrow \quad x-1=0 \to x=1 \\ \searrow \quad \mathrm{e}^x = 0 \to \ \text{NO} \end{array}$$

Como ese número está entre $x=0$ y $x=2$ calculamos separadamente las integrales definidas de $x=0$ hasta $x=1$ y de $x=1$ hasta $x=2$.

Obtengamos la primitiva siguiente por partes:

$$\int \underbrace{(x-1)}_{d} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{i}\mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^x - \int 1\cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = (x-1)\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-2)\,\mathrm{e}^x + C$$

Aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(x-2)\,\mathrm{e}^x\Big]_{x=0}^{x=1} = -\mathrm{e} + 2 < 0 \to \mathscr{A}_1 = \mathrm{e} - 2 \quad (\ \mathrm{u}^2)$$

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[(x-2)\,\mathrm{e}^x\Big]_{x=1}^{x=2} = 0 + \mathrm{e} = \mathrm{e} > 0 \to \mathscr{A}_2 = \mathrm{e} \quad (\ \mathrm{u}^2)$$

Luego el área del recinto es:

$$a(\mathscr{R}) = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \mathrm{e} - 2 + \mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 \quad (\ \mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 2:

a) Derivamos

$$f(x) = 3x - x^2 \ \to\ f'(x) = 3 - 2x$$

Veamos la pendiente de la recta

$$y = 4 - x \to m = -1$$

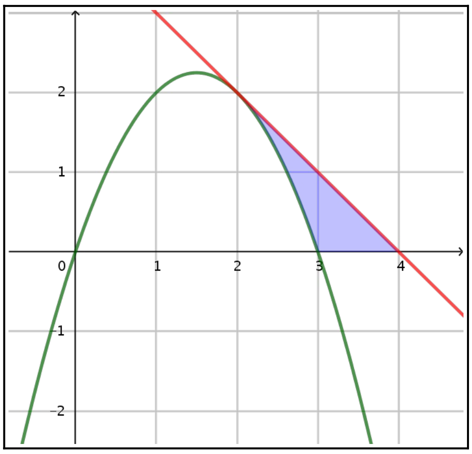
Igualamos para sacar el "punto de tangencia"

$$f'(x) = m \to 3 - 2x = -1 \to x = 1$$

Veamos que la recta tangente para dicho valor es la recta dada:

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \ \to\ y - 3 = -1\cdot(x-1) \ \to\ y = -x + 4$$

b) La gráfica de f es una sencilla parábola. El recinto lo tenemos aquí:



Su área podemos calcularla como la resta de las áreas de:

$\triangle(ABC)$ con $A(2\,,0)$, $B(2\,,2)$, $C(4\,,0)$

$\triangle(ABD)$ con $A(2\,,0)$, $B(2\,,2)$, $D(3\,,0)$ - curvilíneo-

Ésta es el área determinada por la gráfica de f con el eje de abscisas entre $x=2$ y $x=3$, así que:

$$a(\mathscr{R}) = 2\times 2 : 2 - \int_2^3 \left(3x - x^2\right)\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_2^3 \left(3x - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{7}{6}$$

Luego el área es:

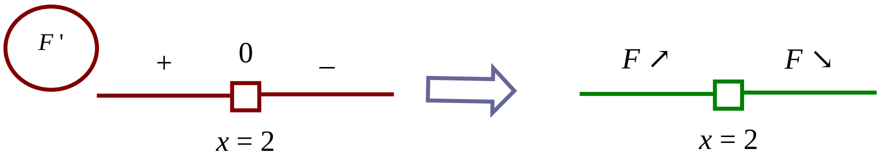
$$a(\mathscr{R}) = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}\ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 3:

a) Como el integrando es una función continua (el denominador nunca se anula), el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$F'(x) = \frac{2-x}{\mathrm{e}^x + 2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

El estudio de signo de la derivada es simple:



Deducimos que para $x = 2$ hay un máximo absoluto.

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$x^2 - 4 = 0 \to x = \pm 2$$

Observando el signo, el valor absoluto queda expresado a trozos así:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si} \quad -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

El separa-fórmulas $x = 2$ queda en el intervalo de integración, así que que separamos la integral en dos:

$$\int_1^3 |x^2 - 4| \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(-x^2 + 4\right) \mathrm{d}x + \int_2^3 \left(x^2 - 4\right) \, \mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_1^3 |x^2 - 4| \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{x=1}^{x=2} + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{5}{3} + \frac{7}{3} = 4$$

EJERCICIO 4:

Las gráficas son una parábola (convexa) y una recta creciente.

Para averiguar dónde se cortan la curva y la recta igualamos sus fórmulas:

$$ax^2 = 6x \;\to\; ax^2 - 6x = 0 \;\to\; x\,(ax - 6) = 0 \;\to\; x = 0\,, x = \frac{6}{a}$$

Calculamos la integral:

$$\int_0^{6/a} \left(6x - ax^2\right) \mathrm{d}x = \left[3x^2 - \frac{a}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=6/a} = 3 \cdot \frac{36}{a^2} - \frac{a}{3} \cdot \frac{216}{a^3} = \frac{108}{a^2} - \frac{72}{a^2} = \frac{36}{a^2}$$

Igualando obtendremos el valor de la constante:

$$9 = \frac{36}{a^2} \;\to\; a^2 = 4 \;\xrightarrow{a>0}\; a = 2$$