Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 21/12/2018

EJERCICIO 1:

Halla la expresión de la primitiva de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{x/2} - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \operatorname{sen}(2x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$.

EJERCICIO 2:

Obtén la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que presenta un extremo en el punto $P(0\,,1)$ y cuya derivada segunda es

$$f''(x) = \frac{6}{1+x^2}$$

EJERCICIO 3:

Obtén la integral indefinida

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{9+x}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x = 9t^2$

EJERCICIO 4:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{x+3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^3}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{6}{\sqrt{1-25x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \cot(2x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int 2\csc^2(7x)\,\mathrm{d}x$

Observación: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse, los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

Integramos cada trozo:

$$F(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{x/2} - x + a & \text{si} \quad x \le 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2}\cos(2x) + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$:

$$F(0) = 1 \;\to\; 2 + a = 1 \;\to\; a = -1$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$F(0-) = F(0+) \;\to\; 2 + a = -\frac{1}{2} + b \;\xrightarrow{a=-1}\; b = \frac{3}{2}$$

Definitivamente nos queda

$$F(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{x/2} - x - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2:

Si tiene un extremo en dicho punto entonces $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$.

La derivada primera es la integral de la derivada segunda:

$$f'(x) = \int \frac{6}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 6\arctan x + C$$

Calculemos esa constante:

$$f'(0) = 0 \;\to\; 0 + C = 0 \;\to\; C = 0$$

Y la función es la integral de la derivada primera. Lo haremos por partes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \underset{i}{\underline{6}} \cdot \underset{d}{\underline{\arctan x}}\,\mathrm{d}x = 6x \cdot \arctan x - \int 6x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 6x \cdot \arctan x - \frac{6}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 6x \arctan x - 3\ln\left(1 + x^2\right) + D \end{aligned}$$

Calculemos esa constante:

$$f(0) = 1 \;\to\; 0 - 0 + D = 1 \;\to\; D = 1$$

Queda:

$$f(x) = 6x\arctan x - 3\ln\left(1 + x^2\right) + 1$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x = 9t^2 \to \mathrm{d}x = 18t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I=\int\frac{\sqrt{9t^2}}{9+9t^2}\cdot 18t\,\mathrm{d}t=\int\frac{54t^2}{9\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{6t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(6t^2\right):\left(t^2+1\right)\ \rightarrow\ \begin{cases} c=6\\ r=-6\end{cases}$$

Así:

$$I=\int\left(6+\frac{-6}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=6t-6\arctan t+C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $x=9t^2\rightarrow t^2=\dfrac{x}{9}\rightarrow t=\dfrac{\sqrt{x}}{3}$:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{x+9}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x}-6\arctan\frac{\sqrt{x}}{3}+C$$

EJERCICIO 4:

El grado del numerador es el menor y no es una logarítmica directa. Veamos los ceros del denominador:

$$x^2+x-2=0\ \rightarrow\ x=-2\,,x=1$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{x+3}{(x+2)\,(x-1)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-1}\ \text{(*)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$x+3=a\,(x-1)+b\,(x+2)\ \longrightarrow\ \begin{cases}\text{si } x=-2\rightarrow 1=-3a\rightarrow a=-\dfrac{1}{3}\\ \text{si } x=+1\rightarrow 4=+3b\rightarrow b=+\dfrac{4}{3}\end{cases}\ \text{(**)}$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int\frac{x+3}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{4}{3}\ln|x-1|+C$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u=1+\ln x$:

$$I=\int(1+\ln x)^3\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\,(1+\ln x)^4+C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u=5x$:

$$I=\frac{6}{5}\int\frac{5x}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{6}{5}\,\mathrm{arc\,sen}\,(5x)+C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u=\cos 2x$:

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{-2\,\mathrm{sen}\,2x}{\cos 2x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$$

d) Es una integral compuesta de tipo cotangente con $u=7x$:

$$I=\frac{2}{7}\int\frac{7}{\mathrm{sen}^2\,(7x)}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{7}\cot\,(7x)+C$$