Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 21/12/2018	

EJERCICIO 1:

Halla la expresión de la primitiva de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{3x} - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x/2) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(0\,, 1)$.

EJERCICIO 2:

Obtén la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que presenta un extremo en el punto $P(0\,, 1)$ y cuya derivada segunda es

$$f''(x) = \frac{12}{1 + x^2}$$

EJERCICIO 3:

Obtén la integral indefinida

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{25 + x}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x = 25t^2$

EJERCICIO 4:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \frac{(2 + \ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1 - 49x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 2\tan(3x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int 3\sec^2(5x)\,\mathrm{d}x$

<u>Observación</u>: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse, los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

Llamemos F a la primitiva. Integramos cada trozo:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} - x + a & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -2\cos(x/2) + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el punto $(0\,,1)$:

$$F(0) = 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{3} + a = 1 \;\rightarrow\; a = \frac{2}{3}$$

Al existir derivada para $x = 0$, debe ser continua en $x = 0$:

$$F(0-) = F(0+) \;\rightarrow\; \frac{1}{3} + a = -2 + b \xrightarrow{a=2/3} b = 3$$

Definitivamente nos queda

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} - x + \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -2\cos(x/2) + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2:

Si tiene un extremo en el punto $(0\,,1)$ entonces $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$.

La derivada primera es la integral de la derivada segunda:

$$f'(x) = \int \frac{12}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 12\arctan x + C$$

Calculemos esa constante:

$$f'(0) = 0 \;\rightarrow\; 0 + C = 0 \;\rightarrow\; C = 0$$

Y la función es la integral de la derivada primera. Lo haremos por partes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \underset{i}{\underline{12}} \cdot \underset{d}{\underline{\arctan x}}\,\mathrm{d}x = 12x \cdot \arctan x - \int 12x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 12x \cdot \arctan x - \frac{12}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 12x \arctan x - 6\ln\left(1+x^2\right) + D \end{aligned}$$

Calculemos esa constante:

$$f(0) = 1 \;\rightarrow\; 0 - 0 + D = 1 \;\rightarrow\; D = 1$$

Queda:

$$f(x) = 12x \cdot \arctan x - 6\ln\left(1+x^2\right) + 1$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x = 25t^2 \rightarrow \mathrm{d}x = 50t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I=\int\frac{\sqrt{25t^2}}{25+25t^2}\cdot 50t\,\mathrm{d}t=\int\frac{250t^2}{25\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{10t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(10t^2\right):\left(t^2+1\right)\ \rightarrow\ \begin{cases} c=10 \\ r=-10 \end{cases}$$

Así:

$$I=\int\left(10+\frac{-10}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=10t-10\arctan t+C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $x=25t^2\rightarrow t^2=\dfrac{x}{25}\rightarrow t=\dfrac{\sqrt{x}}{5}$:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{25+x}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{x}-10\arctan\frac{\sqrt{x}}{5}+C$$

EJERCICIO 4:
El grado del numerador es el menor y no es una logarítmica directa. Veamos los ceros del denominador:

$$x^2-3x+2=0\ \rightarrow\ x=1\,,x=2$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{(x-1)\,(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}\ (*)$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$x+2=a\,(x-2)+b\,(x-1)\ \longrightarrow\ \begin{cases} \text{si } x=1\rightarrow 3=-a\rightarrow a=-3 \\ \text{si } x=2\rightarrow 4=b\rightarrow b=4 \end{cases}\quad (**)$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int\frac{x+2}{x^2-3+2}\,\mathrm{d}x=-3\ln|x-1|+4\ln|x-2|+C$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u=2+\ln x$:

$$I=\int(2+\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\,(2+\ln x)^3+C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u=7x$:

$$I=\frac{5}{7}\int\frac{7x}{\sqrt{1-(7x)^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{7}\operatorname{arc\,sen}(7x)+C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u=\cos 3x$:

$$I=-\frac{2}{3}\int\frac{-3\operatorname{sen}3x}{\cos 3x}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\ln|\cos 3x|+C$$

d) Es una integral compuesta de tipo tangente con $u=5x$:

$$I=\frac{3}{5}\int\frac{5}{\cos^2(5x)}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\tan(5x)+C$$