Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas II – Cálculo Diferencial – 21/11/2018

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\left(ax^2+bx+c\right) & \text{si} \quad x\le 1 \\ \ln x-4x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) [1,5] Halla a, b y c para que sea continua y tenga un extremo relativo en el punto $(-1\,,-4)$.

b) [0,5] ¿Es derivable en todo punto para dichos valores?

c) [0,5] Calcula la ecuación de la recta tangente a su gráfica para $x=\mathrm{e}$.

EJERCICIO 2: [3]

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

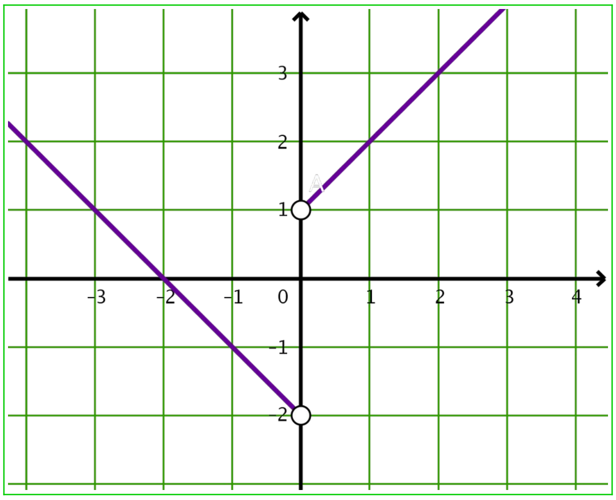
$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}(2x+4)$$

a) [1] Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) [1] Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.

c) [1] Determina las coordenadas, si los hubiese, de los puntos de inflexión de la gráfica de f.

EJERCICIO 3: [2]



Se muestra la gráfica de la derivada de una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Estudia razonadamente:

a) [0,5] Las derivadas laterales de f para $x=0$. ¿Qué le ocurre a la gráfica f en $x=0$?

b) [0,5] La monotonía de la curva $y=f(x)$, señalando dónde se alcanzan los extremos relativos.

c) [0,5] La curvatura de $y=f(x)$, obteniendo los puntos de inflexión.

d) [0,5] ¿En qué abscisa la tangente a la curva $y=f(x)$ es paralela a la recta $x-y+3=0$?

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos la función $f:[0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2\sqrt{x}$.

a) [0,5] Dibuja en unos ejes de coordenadas la gráfica de la función.

b) [2] Obtén las coordenadas del punto de su gráfica más cercano a $A(4\,,0)$. ¿Cuál es la distancia que los separa?

EJERCICIO 1:

a) Si es continua en todo punto, en particular lo es para $x = 1$ (separa-fórmulas):

Valor: $f\,(1) = a + b + c$

Límites: $f\,(1-) = a + b + c$

$f\,(1+) = \ln\,(1) - 4 = -4$

Es continua sólo cuando todo coincide:

$$a + b + c = -4 \text{ [i]}$$

Por otro lado, si en $(-1\,,4)$ hay un extremo relativo, se cumplen dos condiciones:

La derivada se anula para $x = -1$:

$$f'\,(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\rightarrow\; 3a - 2b + c = 0 \text{ [ii]}$$

El punto $(-1\,,-4)$ está en la gráfica:

$$f\,(-1) = -4 \;\rightarrow\; -a + b - c = -4 \text{ [iii]}$$

Con [i] + [iii] obtenemos $b = -4$. Ahora con [ii]+[iii] nos da $a = -4$ y de [i] sacamos ya $c = 4$. Así:

$$a = -4\,, b = -4\,, c = 4$$

b) Para $x \neq 1$ podemos derivar directamente. Y como es continua, hallamos de ahí las derivadas laterales:

$$f'\,(x) = \begin{cases} -12x^2 - 8x + 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{x} - 4 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'\,(1-) = -12 - 8 + 4 = -16 \\ f\,'(1+) = 1 - 4 = -3 \end{cases}$$

Para $x = 1$ no es, pues, derivable, pues no coinciden (punto anguloso).

c) La ecuación de la recta tangente a su gráfica para $x = \mathrm{e}$.

$$y - f\,(\mathrm{e}) = f'\,(\mathrm{e})\,(x - \mathrm{e}) \rightarrow y - (1 - 4\,\mathrm{e}) = \frac{1 - 4\,\mathrm{e}}{\mathrm{e}} \cdot (x - \mathrm{e}) \rightarrow y = \frac{1 - 4\,\mathrm{e}}{\mathrm{e}} x$$

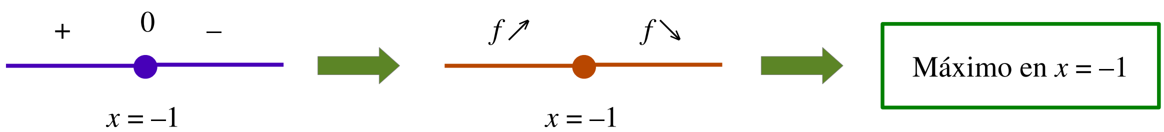
EJERCICIO 2:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{e}^{+\infty}\,(-\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f\,(x) = [0 \cdot (+\infty)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 4}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0$$

b) Derivamos $f'\,(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(-2x - 2)$

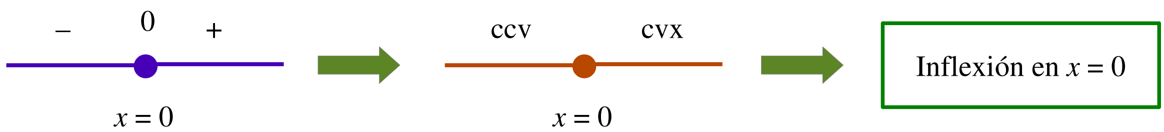
Y estudiamos los ceros e intervalos de signo de la derivada:



Tenemos así un único extremo: un máximo absoluto en $(-1\,,2\,\mathrm{e})$.

c) Derivamos dos veces $f''\,(x) = 2x\,\mathrm{e}^x$

Y estudiamos los ceros e intervalos de signo de la derivada segunda:

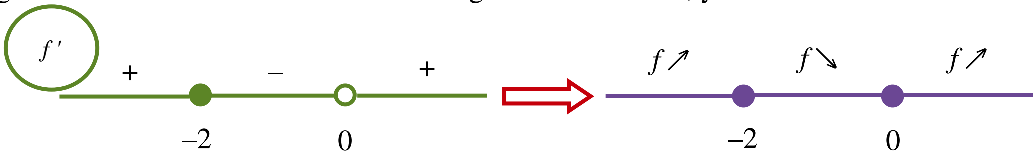


Tenemos así un único punto de inflexión: $(0\,,4)$.

EJERCICIO 3:

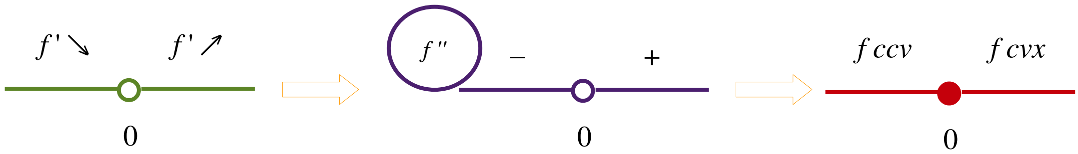
a) Vemos que $f'(0-) = -2$ y $f'(0+) = +1$. Luego $y = f(x)$ tiene para $x = 0$ un punto anguloso.

b) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Deducimos que para $x = -2$ tiene un máximo y para $x = 0$ tiene un mínimo (anguloso)

c) De la monotonía de f' deducimos el signo f'', y de aquí la curvatura de f:



Deducimos que para $x = 0$ tiene un punto de inflexión (anguloso)

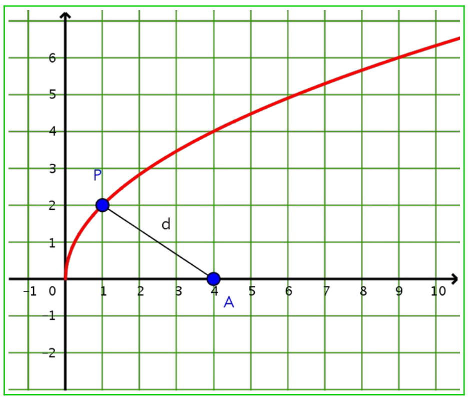
d) La pendiente de la recta dada es $m = 1$. Y en la gráfica de f' apreciamos el punto $(-3, 1)$:

$$f'(x) = 1 \to x = -3$$

Luego la recta tangente puede ser paralela para $x = -3$.

EJERCICIO 4:

[Variable y magnitud que debemos optimizar]



Llamemos $P = (x, y)$ al punto que buscamos. Queremos que sea mínima la distancia de P al punto $A = (4, 0)$:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

[Ligadura]

Como el punto buscado P está en la gráfica se tiene que cumplir la ecuación de la función:

$$y = 2\sqrt{x}$$

[Expresión de la función]

Así debemos <u>minimizar</u>:

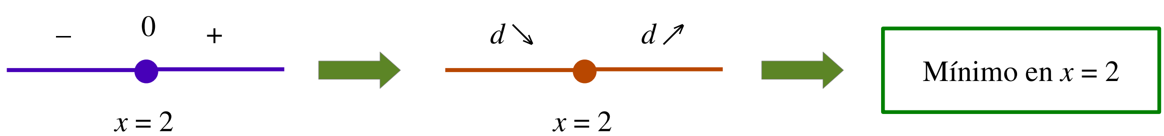
$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (2\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

[Estudio de la derivada / Extremos]

Derivamos e igualamos a cero (regla de la cadena):

$$d' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = 0 \to 2x - 4 = 0 \to x = 2$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de d:



[Conclusión]

El punto más cercano a A es $P = \left(2, 2\sqrt{2}\right)$ y la distancia mínima es $d = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12}$