Nombre:____ **Curso**:_____	
Matemáticas II – Cálculo Diferencial – 19/11/2018	

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [2] Halla a, b y c sabiendo que es continua en todo punto y que $(-1\,,2)$ es un punto de inflexión de su gráfica.

b) [0,5] Obtén la ecuación de la recta normal en dicho punto de inflexión.

EJERCICIO 2: [3]

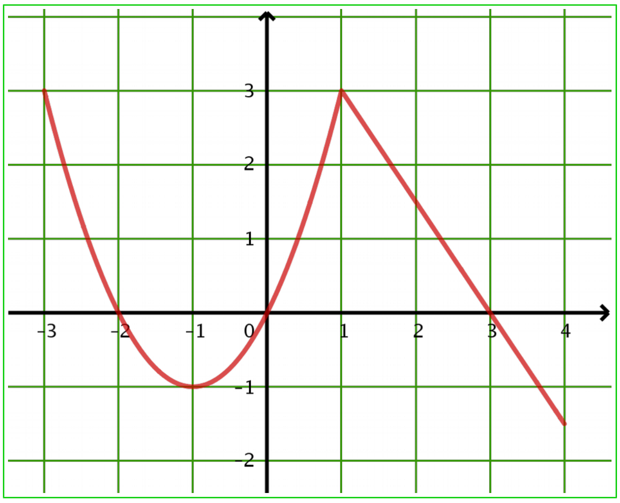
Sea la función f definida mediante

$$f(x) = 3x + \frac{12}{x-1} \quad , \quad x \neq 1$$

a) [1,5] Obtén razonadamente sus asíntotas.

b) [1,5] Averigua los extremos de la función en el intervalo $[2\,,4]$.

EJERCICIO 3: [2]



Se muestra la gráfica de la derivada de una función $f : (-3\,,4) \to \mathbb{R}$. Estudia razonadamente estas cuestiones:

a) [0,5] ¿Es f derivable para $x = 1$? ¿Y dos veces derivable?

b) [0,5] La monotonía de la curva $y = f(x)$, señalando dónde se alcanzan los extremos relativos.

c) [0,5] La curvatura de $y = f(x)$, obteniendo los puntos de inflexión.

d) [0,5] ¿Por qué la recta $7x - 2y + 1 = 0$ no puede ser tangente a la gráfica $y = f(x)$?

EJERCICIO 4: [2,5]

Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 60 euros/metro y la de los otros lados 20 euros/metro, halla la mayor superficie que podría vallarse con 24 000 euros. ¿Qué dimensiones tendría dicho campo?

Todos los ejercicios tienen igual valoración.

EJERCICIO 1:

Continuidad

Si es continua en todo punto, en particular lo es en $x = 0$ (separa-fórmulas). Veamos:

Valor: $f(0) = 0 + 0 + 0 + c = c$

Límites: $f(0-) = 0 + 0 + 0 + c = c$

$$f(0+) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Es continua sólo cuando todo coincide:

$$c = 2$$

Inflexión

Como habla de inflexión en $(-1\,,2)$, primero derivemos dos veces la función para $x < 0$:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \;\to\; f'(x) = 3x^2 + 2ax \;\to\; f''(x) = 6x + 2a$$

Como $(-1\,,2)$ es inflexión:

$$f''(-1) = 0 \;\to\; -6 + 2a = 0 \;\to\; a = 3$$

Como $(-1\,,2)$ está en la gráfica es :

$$f(-1) = 2 \;\to\; (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + 2 = 2 \;\to\; b = 2$$

Recta normal

La ecuación de la recta normal que se pide en el segundo apartado es muy sencilla:

$$y - f(-1) = \frac{-1}{f'(-1)}(x+1) \;\to\; y - 2 = \frac{-1}{-1}\cdot(x+1) \to y = x + 3$$

EJERCICIO 2:

a) Asíntotas verticales: al ser una función racional, sólo es discontinua en los ceros del denominador:

$$x - 1 = 0 \;\to\; x = 1$$

Es fácil comprobar que es asíntota vertical porque hay salto infinito:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3x + 12}{x - 1} = \left[\frac{12}{0}\right] = \pm\infty$$

Asíntotas horizontales: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 3x + 12}{x - 1} \overset{*}{=} \pm\infty \text{ (* Regla de los grados)}$$

Concluimos que no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicua: puede haber una oblicua $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 3x + 12}{x^2 - x} \overset{*}{=} 3 \qquad \text{(* Regla de los grados)}$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x^2 - 3x + 12}{x - 1} - 3x\right) \lim_{x\to-\infty} \frac{12}{x - 1} \overset{*}{=} 0 \quad \text{(* Regla de los grados)}$$

Concluimos que hay una asíntota oblicua: $y = 3x$ para $x \to \pm\infty$.

b) La función es derivable en cada punto del intervalo compacto $[2\,,4]$, así los candidatos son los puntos inicial, final y aquellos en que la derivada se anula (posibles extremos relativos interiores):

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x - 9}{(x-1)^2} = 0 \to 3x^2 - 6x - 9 = 0 \to x = -1\,, x = 3$$

Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

x	2		3		4
y	18	↘	15	↗	16

Vemos que es $(3\,,15)$ el mínimo absoluto y $(2\,,18)$ el máximo absoluto.

EJERCICIO 3:

a) Se aprecia que sí hay derivada y que es $f'(1) = 3$. Ahora bien, como $f'(x)$ tiene un punto anguloso para $x = 1$ concluimos que no existe $f''(1)$.

b) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función. De la monotonía se deducen los extremos relativos.

x	$(-3\,,-2)$	-2	$(-2\,,0)$	0	$(0\,,3)$	3	$(3\,,4)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	0	–
$f(x)$	↗	Máximo	↘	Mínimo	↗	Máximo	↘

c) De la monotonía de la derivada primera deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f. En los cambios de curvatura encontramos los puntos de inflexión.

x	$(-3\,,-1)$	-1	$(-1\,,1)$	1	$(1\,,4)$
$f'(x)$	↘	Mínimo suave	↗	Máximo anguloso	↘
$f''(x)$	–	0	+	$\varnothing$	–
$f(x)$	Cóncava	Punto de Inflexión	Convexa	Punto de Inflexión	Cóncava

d) En la gráfica vemos que la derivada es como máximo 3, así que la pendiente de la tangente nunca podrá ser igual a $m = 3.5$, que es la pendiente de la recta dada.

EJERCICIO 4:

[Variables y magnitud que debemos optimizar]

Sea x la base (junto al camino) e y la altura de esa parcela rectangular. Maximizamos la superficie:

$$S = x \cdot y$$

[Ligadura]

Como el costo total de la valla (perímetro) asciende a 24000 euros:

$$60x + 20x + 20y + 20y = 24000 \to 80x + 40y = 24000 \to y = 600 - 2x$$

[Función]

Queremos maximizar

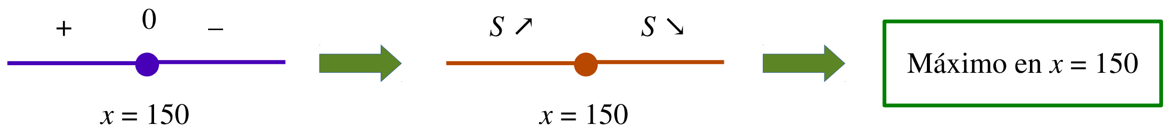
$$S = x \cdot (600 - 2x) = 600x - 2x^2$$

[Derivada / Extremo]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S' = 600 - 4x = 0 \rightarrow x = 150$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



[Respuesta]

Luego el campo rectangular tiene 150 m de ancho (junto al camino) y 600 – 2 · 150 = 300 m de largo, con

$$S = 150 \cdot 300 = 45000 \text{ m}^2$$