Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 29/10/2018	

EJERCICIO 1: [3]

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-2}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 2\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) [0,5] Estudia su continuidad.

b) [1,5] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [1] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2,5]

Calculemos b y c en la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

sabiendo que es derivable en todo punto.

EJERCICIO 3: [2,5]

a) [1,25] Obtén la ecuación de la normal a la curva $y = x\,|x-3|$ para $x = 1$.

b) [1,25] Obtén la ecuación de la tangente a la gráfica de la función definida por

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x} \quad , \quad x < 0$$

que es paralela a $x - 2y + 5 = 0$.

EJERCICIO 4: [2]

Calcula el siguiente límite, según los valores de la constante a:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+a)\ln x}{\mathrm{e}^{1-x} + x - 2}$$

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para $x = 0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo. Veamos detenidamente en este punto:

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0) = 0 + 2\,\mathrm{e}^0 = 2$

Tendencias: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = \dfrac{-2}{-1} = 2 \\ f(0+) = 0 + 2 = 2 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-2}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 2\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x = 0$ y, por consiguiente, en todo punto .

b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3(x-1) - (3x-2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 + 2\,\mathrm{e}^{-2x} \cdot (-2) = 1 - 4\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$, como f es continua calculamos las derivadas laterales como sigue:

D.L. $\begin{cases} f'(0-) = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ f'(0+) = 1 - 4 \cdot \mathrm{e}^0 = -3 \end{cases}$

Concluimos que f no es derivable para $x = 2$ (es un punto *anguloso*).

c) <u>Asíntotas verticales</u>: como no hay salto infinito, no hay asíntotas verticales.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-2}{x-1} = \dfrac{3}{1} = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 2\,\mathrm{e}^{-2x}\right) = +\infty + 2 \cdot \mathrm{e}^{-\infty} = +\infty + 2 \cdot 0 = +\infty$

Donde en el primer límite hemos usado la regla de los grados.

Concluimos que hay sólo una asíntota horizontal:

$y = 3$ para $x \to -\infty$

<u>Asíntotas oblicuas</u>: puede haber una $y = mx + n$ (para $x \to +\infty$).

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{x} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 4\,\mathrm{e}^{-2x}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

$n = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 2\,\mathrm{e}^{-2x} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\,\mathrm{e}^{-2x}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-\infty} = 0$

En el primer límite hemos usado la Regla de L'Hôpital.

Concluimos que hay sólo una asíntota oblicua:

$$y = x \text{ para } x \to +\infty$$

EJERCICIO 2:

Como es derivable en todo punto, entonces es continua en todo punto. En particular, lo es para $x = 0$:

$f(0) = 0 + 0 + c = c$

$f(0-) = 0 + 0 + c = c$

$f(0+) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[*]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

Igualando obtenemos $c = 1$.

Como la función es derivable en todo punto, en particular es derivable para $x = 0$. Derivemos cada trozo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Las derivadas laterales para $x = 0$ deben coincidir:

$f'(0-) = 0 + b = b$

$f(0+) = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{[*]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + x\,e^x - e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Igualando obtenemos $b = \frac{1}{2} = 0.5$

En [*] usado la Regla de L'Hôpital.

EJERCICIO 3:

a) Tengamos en cuenta que $x - 3$ es cero para $x = 3$, negativo para $x < 3$ y positivo para $x > 3$. Así:

$$x > 3 \to y = x\,|x-3| = x\,(x-3) = x^2 - 3x \to y' = 2x - 3$$

$$x < 3 \to y = x\,|x-3| = x\,(-x+3) = -x^2 + 3x \to y' = -2x + 3$$

Para la recta normal es sólo usamos la fórmula para $x < 3$:

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}\,(x-1) \to y - 2 = -\frac{1}{1} \cdot (x-1) \to y = -x + 3$$

b) Derivemos:

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x} \;\to\; f'(x) = 0 - \frac{0 \cdot x - 2 \cdot 1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

La tangente tendrá la misma pendiente que esa recta:

$$x - 2y + 5 = 0 \;\to\; 2y = x + 5 \;\to\; y = \frac{x+5}{2} \;\to\; m = \frac{1}{2}$$

En el punto de tangencia la derivada es igual a la pendiente de la tangente:

$$f'(x) = m \;\to\; \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2} \;\to\; x^2 = 4 \;\xrightarrow{x<0}\; x = -2$$

La fórmula de la recta tangente:

$$y - f(-2) = f'(-2)\,(x+2) \to y - 4 = -\frac{1}{2} \cdot (x+2) \to y = -\frac{1}{2}x + 5$$

EJERCICIO 4:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+a)\ln x}{\mathrm{e}^{1-x}+x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+\dfrac{x+a}{x}}{-\mathrm{e}^{1-x}+1}=\left[\frac{1+a}{0}\right]=L$$

Debemos distinguir aquí dos casos:

Si $a\neq -1$ eso es un límite infinito:

$$L=\left[\frac{1+a}{0}\right]=\pm\infty$$

Si $a=-1$ eso es una indeterminación, que resolvemos aplicando otra vez L'Hôpital:

$$L=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\mathrm{e}^{1-x}}=\frac{1+1}{1}=2$$

$D\left(\mathrm{e}^{1-x}\right)=\mathrm{e}^{1-x}\cdot(-1)=-\mathrm{e}^{1-x}$

$D\left[(x+a)\ln x\right]=1\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}(x+a)=\ln x+\dfrac{x+a}{x}$

$D\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{1\cdot x-1\cdot(x-1)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}$