Nombre:______________________________________ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 31/10/2018	

EJERCICIO 1: [2]

Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 + |2 - x|$$

¿Cuál es la recta tangente para $x_0 = 3$?

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + b & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{a - \mathrm{e}^x}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [1,75] Calcula $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ según los valores de a.

b) [0,75] ¿Para qué valores de a y b es continua en todo punto?

EJERCICIO 3: [1,5]

Obtén la ecuación de la tangente a la gráfica de la función definida por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x \geq 0$$

que pasa por el punto $P(-1, 0)$.

EJERCICIO 4: [1,5]

Obtén las asíntotas de la función definida mediante

$$f(x) = \frac{2x^2}{x - 1} \quad , , \quad x \neq 1$$

EJERCICIO 5: [2,5]

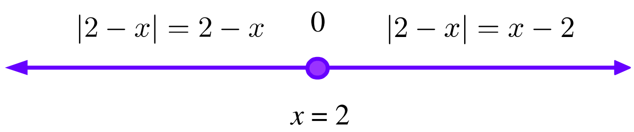
Calcula

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt{x} \ln(x)$

EJERCICIO 1:

Primero, expresemos como una función a trozos. Observemos que $2-x=0 \to x=2$, que es negativo si $x>2$ y que es positivo si $x<2$. Luego



Queda entonces:

$$f\left(x\right)=x^2+|2-x|=\begin{cases} x^2-x+2 & \text{si} \quad x<2 \\ x^2+x-2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

CONTINUIDAD: sólo podría ser discontinua para $x=2$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos detenidamente en este punto:

$\boxed{x=2}$

Valor: $f\left(2\right)=4+2-2=4$

Límites: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \begin{cases} f\left(2-\right)=4-2+2=4 \\ f\left(2+\right)=4+2-2=4 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x=2$ y, por ello, en todo punto.

DERIVABILIDAD: podemos derivar cada trozo directamente:

$$f'\left(x\right)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Para $x=2$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'\left(2_-\right)=2\cdot 2-1=3 \\ f'\left(2_+\right)=2\cdot 2+1=5 \end{cases}$$

Como no coinciden, concluimos que f no es derivable para $x=2$ (es un punto *anguloso*).

TANGENTE: para $x=3$ es

$$y-f\left(3\right)=f'\left(3\right)\left(x-3\right)\to y-10=5\cdot\left(x-3\right)\to y=5x-5$$

EJERCICIO 2:

a) Ese límite corresponde a la fórmula con $x>0$:

$$\lim_{x\to 0+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{a-\mathrm{e}^x}{x}=\frac{a-1}{0}=L$$

Si $a\neq 1$ eso es un límite infinito:

$$L=\left[\frac{a-1}{0}\right]=\pm\infty$$

Si $a=1$ eso es una indeterminación, que resolvemos aplicando L'Hôpital:

$$L=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0+}\frac{e^x}{1}=-1$$

b) Sólo puede ser discontinua para $x=0$.

Según lo anterior, si $a \neq 1$ hay una discontinuidad de salto infinito. Así que debe ser $a = 1$.

Para ese caso tenemos:

Valor: $f\,(0) = 0 + b = b$

Límites: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \begin{cases} f\,(0-) = 0 + b = b \\ f\,(0+) = -1 \end{cases}$

De ahí obtenemos igualando que es $b = -1$.

EJERCICIO 3:

$$f(x) = \sqrt{x} \;\rightarrow\; f'\,(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

El punto es exterior a la curva y no sabemos en qué punto se traza la tangente. La tangente para $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \rightarrow y - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,(x - a)$$

Como <u>la tangente</u> pasa por $(-1\,,0)$, la ecuación de la recta se verifica con $x = -1$, $y = 0$:

$$0 - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,(-1 - a) \;\rightarrow\; -\sqrt{a} = \frac{-1 - a}{2\sqrt{a}} \;\rightarrow\; -2\sqrt{a^2} = -1 - a \;\rightarrow\; -2a = -1 - a \;\rightarrow\; a = 1$$

Así, la tangente es:

$$y - \sqrt{1} = \frac{1}{2\sqrt{1}}\,(x - 1) \rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}\,(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 4:

<u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede ser discontinua para $x = 1$ (cero del denominador):

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2}{x - 1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

Tenemos así que para $x = 1$ hay asíntota vertical.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2}{x - 1} = \pm\infty$$

Es infinito pues el grado del numerador supera al del denominador. Por ello no hay asíntotas horizontales.

<u>Asíntotas oblicuas</u>: puede haber una asíntota $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f\,(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{[grados iguales]}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f\,(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x - 1} - 2x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x - 1} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{[grados iguales]}$$

Concluimos que $y = 2x + 2$ es asíntota oblicua.

EJERCICIO 5:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-\cancel{2x})}{\cancel{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln(x) = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \left(-2\sqrt{x}\right) = 0$$

En [*] se ha usado la Regla de L'Hôpital.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\cancel{0\cdot\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}} = -\frac{1\cdot 2x\sqrt{x}}{x} = -2\sqrt{x}$$