Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas II – Recuperación Geometría – 27/05/2017

EJERCICIO 1: [3]

Consideremos las rectas

$$r:\begin{cases} x-y=2 \\ 2y+z=1 \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=a-\lambda \\ z=2 \end{cases}$$

a) [1,25] Estudia su posición relativa según los valores de a.

b) [1,25] Para $a=-1$ halla la ecuación general del plano que las contiene.

c) [0,5] Para $a=-1$ calcula el ángulo que forman.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos el punto y el plano

$$P\,(1\,,-5\,,0) \quad , \quad \pi: x-2y+2z-2=0$$

a) [1,25] Obtén la proyección del punto en dicho plano.

b) [1,25] Halla el área del triángulo que determina el plano con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 3: [2]

Consideremos el punto y la recta dados por

$$P(4\,,1\,,1) \quad , \quad r: \frac{x-2}{-1}=y=\frac{z+1}{2}$$

Determina la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos la recta y el plano dados por

$$r: \frac{x+1}{2}=y=\frac{z-1}{m} \quad , \quad \pi: x+2y-2z-5=0$$

a) [0,5] ¿Para qué valor de m la recta y el plano son paralelos?

b) [2] Para $m=1$, obtén los puntos de la recta, si existen, cuya distancia al plano es igual a 4.

EJERCICIO 1:

Pasemos primero r a paramétricas:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2y + z = 1 \end{array} \right. \quad \xrightarrow{y=\mu} \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2+ \ \mu \\ y & = & \mu \\ z & = & 1 - 2\mu \end{array} \right.$$

a) Para estudiar su posición relativa primero veamos si son proporcionales los vectores directores de ambas:

$$\vec{v}_r = (1\,,1\,,-2) \ , \ \vec{v}_s = (1\,,-1\,,0) \ \rightarrow \ \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \ \rightarrow \ \vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$$

Así que las rectas o son secantes o se cruzan. Tomamos $P_r = (2\,,0\,,1)$ y $P_s = (2\,,a\,,2)$ y calculamos

$$\Delta = \det[\overrightarrow{P_rP_s}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s] = \left| \begin{array}{ccc} 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = -2a - 2 \ \rightarrow \ -2a - 2 = 0 \ \rightarrow \ a = -1$$

Tenemos así:

Si es $a \neq -1$ entonces las rectas se cruzan.

Si es $a = -1$ entonces las rectas son secantes (en un punto, claro).

b) Por lo anterior, sabemos que para $a = -1$ ambas rectas están en un mismo plano π. Como r está contenida en π, un punto del plano es $P_r = (2\,,0\,,1)$. Y los vectores directores de las rectas $\vec{v}_r = (1\,,1\,,-2)$ y $\vec{v}_s = (1\,,-1\,,0)$ determinan la dirección del plano. Su ecuación es:

$$\left| \begin{array}{ccc} x-2 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right| = 0 \ \xrightarrow{operando} \ -2x - 2y - 2z + 6 = 0 \ \rightarrow \ \pi : x + y + z - 3 = 0$$

c) Observemos que

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s$$

Por ello, el ángulo que forman las dos rectas es 90° o $\pi/2$ rad.

EJERCICIO 2:

a) Calcularemos la ecuación de la recta r que pasa por el punto P y que es perpendicular al plano π. El punto Q intersección de r con π es el pie de la perpendicular o proyección de P en π.

La recta r pasa por $P\,(1\,,-5\,,0)$ y tiene la dirección del vector normal al plano $\vec{n} = (1\,,-2\,,2)$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = \ \ 1 + \ \lambda \\ y = -5 - 2\lambda \\ z = \qquad 2\lambda \end{array} \right.$$

Ahora hallamos a intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$r \ \mapsto \ \pi : 1 + \lambda + 10 + 4\lambda + 4\lambda + 2 = 0 \ \rightarrow \ \lambda = -1$$

Sustituyendo en las paramétricas de la recta:

$$Q = (0\,,-3\,,-2)$$

b) Primero obtengamos las coordenadas de los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas:

Corte eje X: $y = z = 0 \to x = 2 \to A\,(2\,,0\,,0)\,.$

Corte eje Y: $x = z = 0 \to y = -1 \to B\,(0\,,-1\,,0)\,.$

Corte eje Z: $x = y = 0 \to z = 1 \to C\,(0\,,0\,,1)\,.$

Calculemos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1\,,2\,,-2)$$

Porque el área pedida es

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 1.5 \text{ u}^2$$

EJERCICIO 3:

La recta pedida pasa por $P\,(4\,,1\,,1)$ y por el punto Q proyección de P sobre r.

Vamos a usar el procedimiento del punto genérico. Expresamos Q en función de un parámetro:

$$r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \to Q = (2-\lambda\,,\lambda\,,-1+2\lambda)$$

Debe ser $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_r$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \to (-\lambda - 2\,,\lambda - 1\,,2\lambda - 2)\cdot(-1\,,1\,,2) = 0 \to 6\lambda - 3 = 0 \to \lambda = \frac{1}{2}$$

Tenemos así que

$$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{5}{5}\,,-\frac{1}{2}\,,-1\right)$$

La recta pedida pasa por P y tiene la dirección de $\overrightarrow{PQ}$:

$$s : \frac{x-4}{-5/2} = \frac{y-1}{-1/2} = \frac{z-1}{-1}$$

EJERCICIO 4:

a) Aplicamos la condición de paralelismo de recta y plano:

$$r \parallel \pi \leftrightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \to (2\,,1\,,m)\cdot(1\,,2\,,-2) = 0 \to 4 - 2m = 0 \to m = 2$$

Tenemos así que

Si es $m \neq 2$ entonces s y π son secantes (en un punto).

Si es $m = 2$ la recta es paralela o está contenida en el plano. Para salir de dudas, sustituimos un punto cualquiera de la recta en la ecuación del plano:

$$P_r = (-1\,,0\,,1) \mapsto \pi : -1 + 0 - 2 - 5 \neq 0$$

Como el punto no está en el plano, la recta es paralela al plano.

b) [Punto genérico] Pasamos la recta a paramétricas:

$$r:\frac{x+1}{2}=y=\frac{z-1}{2}\;\rightarrow\; r:\begin{cases} x= -1+2\lambda \\ y= \qquad\;\;\lambda \\ z= \;\;1+\;\lambda \end{cases}$$

Así el punto P que buscamos en la recta es

$$P=(-1+2\lambda\,,\lambda\,,1+\lambda)$$

Ahora, usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano, obtendremos el parámetro:

$$\mathrm{d}\,(P\,,\pi)=\frac{|-1+2\lambda+2\lambda-2-2\lambda+5|}{\sqrt{1+4+4}}=4\;\rightarrow\;|2\lambda-8|=12$$

Para que un valor absoluto resulte ser 12, su argumento debe ser 12 o -12. Por lo tanto:

$$|2\lambda-8|=12\;\rightarrow\;\left|\begin{array}{lcl} 2\lambda-8=+12 & \rightarrow & \lambda=10 \\ 2\lambda-8=-12 & \rightarrow & \lambda=-2 \end{array}\right.$$

Como vemos hay dos soluciones, así que tenemos dos puntos:

$$P_1=(19\,,10\,,11)\quad,\quad P_2=(-5\,,-2\,,-1)$$