Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Geometría del espacio – 23/05/2017	

EJERCICIO 1:

Consideremos el puntos y el plano dados por

$$P\,(1\,,0\,,3) \quad , \quad \pi : 2x + y - 3z + 6 = 0$$

a) [1,25] Calcula las ecuaciones general y paramétricas del plano que pasa por P y es paralelo a π.

b) [1,25] Obtén el área del triángulo que determina el plano π con los ejes de coordenadas.

EJERCICIO 2:

Consideremos el punto y la recta siguientes

$$P\,(1\,,0\,,1) \quad , \quad r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

a) [1,25] Determina el punto de r más cercano a P.

b) [1,25] Halla la ecuación de la recta secante perpendicular a r trazada desde P.

EJERCICIO 3:

Consideremos los puntos y el plano

$$A\,(2\,,1\,,0) \quad , \quad B\,(3\,,0\,,-2) \quad , \quad \pi : 3x + 4y + z = 0$$

a) [1,25] Averigua las coordenadas del punto simétrico de A respecto de π.

b) [1,25] ¿Qué punto del eje Y equidista de A y de B?

EJERCICIO 4:

Sean r y s las rectas dadas por

$$r : \begin{cases} x + y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = a \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

a) [1,25] Estudia la posición relativa de ambas rectas según el valor de a.

b) [1,25] Halla la ecuación del plano que contiene a r y s cuando $a = 5$.

EJERCICIO 1:

a) El plano paralelo π' pasa por $P\,(1\,,0\,,3)$ y tiene el mismo vector normal $\vec{n}=(2\,,-3\,,1)$ que π, así:

$$\pi' : 2\,(x-1) - 3\,(y-3) + z - 3 = 0 \;\rightarrow\; \pi' : 2x + y - 3z + 7 = 0$$

Tomemos x y z como parámetros y despejemos y:

$$\pi' : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -7 - 2\lambda + 3\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

b) Primero obtengamos las coordenadas de los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas:

Corte eje X: $y = z = 0 \;\rightarrow\; x = -3 \;\rightarrow\; A\,(-3\,,0\,,0)\,.$

Corte eje Y: $x = z = 0 \;\rightarrow\; y = -6 \;\rightarrow\; B\,(0\,,-6\,,0)\,.$

Corte eje Z: $x = y = 0 \;\rightarrow\; z = 2 \;\rightarrow\; C\,(0\,,0\,,2)\,.$

Calculemos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-12\,,-6\,,18)$$

Porque el área pedida es

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 6^2 + 18^2} = 2\sqrt{14}\ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 2:

a) El punto pedido Q es el pie de la perpendicular. Pasamos primero la recta a paramétricas.

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ \quad\;\; z = 2 \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda} r : \begin{cases} x = \quad\;\; \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Obtengamos el plano π perpendicular a r por P. El plano pasa por $P\,(1\,,0\,,1)$ y tiene como vector normal $\vec{n} = \vec{v}_r = (1\,,-1\,,0)$:

$$\pi : 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot y + 0 \cdot (z-1) = 0 \;\rightarrow\; x - y - 1 = 0$$

El punto Q es la intersección de este plano y de la recta r. Sustituimos para calcular el parámetro:

$$r \;\mapsto\; \pi : \lambda - 1 + \lambda - 1 = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$$

Llevando ese parámetro a la ecuación de la recta obtenemos:

$$Q = (1\,,0\,,2)$$

b) La recta perpendicular secante pasa por el punto $P\,(1\,,0\,,1)$ dado y tiene como vector director al vector $\overrightarrow{PQ} = (0\,,0\,,1)$:

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

EJERCICIO 3:

a) Obtengamos la ecuación de la recta r pasa por $A\,(2\,,1\,,0)$ y es perpendicular al plano. Tendrá la dirección del vector normal $\vec{n}=(3\,,4\,,1)$:

$$r:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=1+4\lambda \\ z=\quad\;\;\lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos la intersección de esa recta con el plano, que es el punto proyección Q:

$$r\;\mapsto\;\pi:6+9\lambda+4+16\lambda+\lambda+3=0\;\rightarrow\;\lambda=-\frac{1}{2}$$

Es:

$$Q=\left(\frac{1}{2}\,,-1\,,-\frac{1}{2}\right)$$

Usando el punto medio:

$$\frac{A+A'}{2}=Q\;\rightarrow\;A'=2Q-A\;\rightarrow\;A'=(-1\,,-3\,,-1)$$

b) En el eje Y sabemos que es $x=0$ y $z=0$, así que el punto que buscamos será $P=(0\,,t\,,0)$:

$$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|\rightarrow\sqrt{(t-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{3^2+t^2+2^2}\rightarrow t^2-2t+1+4=9+t^2+4\rightarrow t=-4$$

Luego

$$P=(0\,,-4\,,0)$$

EJERCICIO 4:

a) Veamos primero si los vectores directores son paralelos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r=(-1\,,1\,,0) \\ \vec{v}_s=(1\,,0\,,-1) \end{array}\right\}\;\rightarrow\;\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{0}\;\rightarrow\;\vec{v}_r\nparallel\vec{v}_s$$

Luego bien son secantes, bien se cruzan. Tomamos $P_r=(5\,,0\,,4)$ y $P_s=(1\,,a\,,3)$ y calculamos

$$\det[\overrightarrow{P_rP_s}\,,\vec{v}_r\,,\vec{v}_s]=\begin{vmatrix} -4 & a & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=5-a=0\;\rightarrow\;a=5$$

Tenemos así:

Si es $a\neq 5$ entonces las rectas se cruzan.

Si es $a=5$ entonces las rectas son secantes (en un punto, claro).

b) Para $a=5$, como son secantes, son coplanarias: están contenidas en un mismo plano.

Tenemos un punto $P\,(1\,,0\,,1)$ y dos vectores directores: $\vec{v}_r=(-1\,,1\,,0)$, $\vec{v}_s=(1\,,0\,,-1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y & z-4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0\;\rightarrow\;-x-y-z+9=0$$