Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 02/05/2017

EJERCICIO 1: [1]

Resuelva el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=2 \\ cx+dy=3 \end{array}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2: [3,5]

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 4y & + & 6z & = & 6 \\ & & my & + & 2z & = & m+1 \\ -3x & + & 6y & - & 3mz & = & -9 \end{array}\right\}$$

a) [2] Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) [1] Resuélvelo para $m=3$.

c) [0,5] Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que $y=0$.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & (k+2)\,z & = & 1 \\ -4x & + & (k+1)\,y & - & 6z & = & 3 \end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discute el sistema según los valores del parámetro k.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema y, si fuese compatible, su solución?

c) [0,5] Razona si para cierto valor de k es $(1\,,-1\,,1\,)$ una solución.

EJERCICIO 4: [3]

Una tienda vende una clase de calcetines a 15€ el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 70% de descuento sobre el precio inicial, y en el segundo mes un 60% también sobre el precio inicial.

Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 6975€ y que en las rebajas ha vendido la tercera parte de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 60%?

EJERCICIO 1:

a) Designemos por C, X y B a la matriz de coeficientes, de incógnitas y de términos independientes, respectivamente Expresamos el sistema matricialmente y despejamos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \to X = C^{-1}B \to X = MB$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) Para discutir, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -6m^2 + 18m \xrightarrow{|C|=0} m \cdot (-6m + 18) = 0 \to m = 0 \,, m = 3$$

<u>Caso 1</u>: $m \neq 0$ y $m \neq 3$.

Como $\det(C) \neq 0$ y no hay más de tres filas en la ampliada

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

S es compatible determinado.

<u>Caso 2</u>: $m = 0$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -9 \end{vmatrix} \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

<u>Caso 3</u>: $m = 3$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ -3 & 6 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0 \ , \ \Delta_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ -3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas de Δ_2), con x e y como incógnitas principales (columnas de Δ_2) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \begin{cases} 2x - 4y = 6 - 6z \\ 3y = 4 - 2z \end{cases}$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = \left(\frac{17 - 13\lambda}{3}\,,\frac{4 - 2\lambda}{3}\,,\lambda\right)$$

c) Haciendo $y = 0$:

$$\frac{4 - 2\lambda}{3} \;\rightarrow\; 4 - 2\lambda = 0 \rightarrow\; \lambda = 2$$

Sustituyendo:

$$(x\,,y\,,z) = (-3\,,0\,,2)$$

EJERCICIO 3:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & k+2 & 1 \\ -4 & k+1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

a) Partamos de un menor de orden 1 distinto de cero

$$\Delta_1 = |2| \neq 0$$

Sus orlados de orden 2 son:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & k+1 \end{vmatrix} = 2k - 2\,,\ \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & k+2 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = 4k - 4\,,\ \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

Caso 1: $k = 1$.

Todos los orlados en C son cero pero el orlado último en A, con la columna de los términos independientes, no:

$$\text{rg}(C) = 1 \neq \text{rg}(A) = 2$$

Es incompatible.

Caso 2: $k \neq 1$

Todos los orlados son distintos de cero, por ello:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $k = 1$ se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Si $k \neq 1$ se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

c) Pongamos $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$:

$$\begin{cases} 2+1+k+2=1 \rightarrow k=-4 \\ -4-k-1-6=3 \rightarrow k=-14 \end{cases}$$

Como vemos, es imposible: no hay ningún valor de *k* que cumpla dichas condiciones. Por ello, no puede ser solución del sistema en ningún caso.

EJERCICIO 4:

Sean

x el número de calcetines a 15 €

y el número de calcetines a 4,50€

z el número de calcetines a 6€

Total de calcetines es 600:

$$x + y + z = 600 \text{ [1]}$$

Total de ingreso es 6975 €:

$$15x + 4.50y + 6z = 6975 \text{ [2]}$$

El número de rebajados es un tercio del total:

$$y + z = 200 \text{ [3]}$$

Si a la ecuación [1] le resto la [3] sale directamente

$$x = 400$$

Sustituyendo $x = 400$ en la [2] y multiplicando por 4.50 la [3] me queda el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 4.50y + \quad 6z = 975 \\ 4.50y + 4.50z = 900 \end{array}\right\}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$1.5z = 75 \ \rightarrow \ z = 50$$

Luego se aplicado el 60% de descuento a 50 pares de calcetines.