Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Sistemas de Ecuaciones – 03/05/2017	

EJERCICIO 1: [1,5]

Halla λ y resuelve el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left.\begin{array}{r}(\lambda+1)\,x+5y=1\\ \lambda\,x+3y=2\end{array}\right\}$$

sabiendo que la inversa de la matriz de coeficientes es

$$M=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2: [3,5]

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcc}x & + & y & + & z & = & a-1\\ 2x & + & y & + & az & = & a\\ x & + & ay & + & z & = & 1\end{array}\right\}$$

a) [2,5] Discútelo según los valores del parámetro a.

b) [1] Resuelve el caso $a=2$.

c) [0,5] Para dicho valor de $a=2$, calcule, si es posible, una solución en la que la suma de las incógnitas sea igual a a cinco.

EJERCICIO 3: [2]

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{r}bx+3y+\ \ z=2\\ 4x+6y+bz=0\end{array}\right\}$$

a) [1,5] Discuta el sistema comparando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

b) [0,5] ¿Qué interpretación geométrica tiene el sistema y, si fuese compatible, su solución?

EJERCICIO 4: [3]

Un estado compra 140000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 30, 40 y 50 dólares respectivamente. La factura total asciende a cinco millones trescientos mil dólares.

Si del primer suministrador recibe el 75% de lo que adquiere a los otros dos juntos, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

EJERCICIO 1:

Designemos por C, X y B a la matriz de coeficientes, de incógnitas y de términos independientes, respectivamente. Expresamos el sistema matricialmente y despejamos la matriz de incógnitas:

$$CX = B \to X = C^{-1}B \to X = MB$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{operando} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para hallar el parámetro podemos sustituir la solución en una de las ecuaciones del sistema:

$$(\lambda+1)\cdot(-7) + 5\cdot 3 = 1 \;\to\; -7\lambda - 7 + 15 = 1 \;\to\; \lambda = 1$$

EJERCICIO 2:

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y vemos cuándo es cero:

$$\det(C) = -a^2 + 3a + 2 \xrightarrow{|C|=0} -a^2 + 3a + 2 = 0 \to a = 1\,, a = 2$$

Caso 1: $a \neq 2$ y $a \neq 7$.

En este caso es claro que el sistema es compatible determinado pues $\det(C) \neq 0$ y así

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 3$$

Caso 2: $a = 1$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\,,\; \Delta_3^2 = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \neq 0$$

Deducimos de aquí que S es incompatible al ser:

$$\mathrm{rg}(C) = 2 \neq \mathrm{rg}(A) = 3$$

Caso 3: $a = 2$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Observemos los menores:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \xrightarrow{orlamos} \Delta_3^1 = |C| = 0\,,\; \Delta_3^2 = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 \end{array}\right| = 0$$

Deducimos de aquí:

$$\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(A) = 2 < 3 = n$$

S es compatible indeterminado con $3 - 2 = 1$ parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce además que S equivale al sistema formado con las dos primeras ecuaciones (filas del menor principal), con x e y como incógnitas principales (columnas del menor principal) y z como incógnita libre o parámetro:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 - \ \ z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{array} \right.$$

Poniendo $z = \lambda$ y resolviendo:

$$(x\,,y\,,z) = (1 - \lambda\,,0\,,\lambda)$$

c) Debe ser:

$$x + y + z = 5 \ \rightarrow \ 1 - \lambda + 0 + \lambda = 5 \ \rightarrow \ 1 = 5 \ \rightarrow \ \text{NO}$$

Como vemos, no hay solución alguna que cumpla eso.

EJERCICIO 3:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} b & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & b & 0 \end{array} \right)$$

a) Vemos primero que hay un menor de orden uno (el cuatro de la segunda fila, por ejemplo) no nulo, así los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son 1 ó 2:

$$\Delta_1 = \det(4) \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden dos de ese menor con la primera fila:

$$\Delta_2^1 = \begin{vmatrix} b & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6b - 12 \quad , \quad \Delta_2^2 = \begin{vmatrix} b & 1 \\ 4 & b \end{vmatrix} = b^2 - 4 \quad , \quad \Delta_2^3 = \begin{vmatrix} b & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Caso 1: $b = 2$.

Tenemos que S es incompatible pues los rangos no son iguales:

$$\left. \begin{array}{r} \Delta_1 \neq 0\,,\ \Delta_2^1 = \Delta_2^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{rg}\,(C) = 1 \\ \Delta_2^3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{rg}\,(A) = 2 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{rg}\,(C) \neq \text{rg}\,(A)$$

Caso 2: $b \neq 2$.

Tenemos que $\Delta_2^1 \neq 0$ y así el rango de ambas matrices es el máximo posible:

$$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = 2 < 3$$

Es compatible indeterminado con un parámetro.

b) Del estudio anterior se deduce:

Si $b = 2$ se trata de dos planos paralelos en el espacio.

Si $b \neq 2$ se trata de dos planos secantes en una línea recta, que es la solución del sistema.

EJERCICIO 4:

Un estado compra 140000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 30, 40 y 50 dólares respectivamente. La factura total asciende a cinco millones trescientos mil dólares.

Si del primer suministrador recibe el 75% de lo que adquiere a los otros dos juntos, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

Sean

x el número de barriles a 30€

y el número de barriles a 40€

z el número de barriles a 50€

Total de barriles es 140000:

$$x + y + z = 140000 \text{ [1]}$$

Total de ingreso es 5300000€:

$$30x + 40y + 50z = 5300000 \text{ [2]}$$

Del primero recibe el 75% de lo recibido de los otros dos:

$$x = 0.75\,(y + z) \text{ [3]}$$

Sustituyendo [3] en [1] y [2] y limpiando:

$$\left.\begin{array}{r} 1.75y + 1.75z = 140000 \\ 62.5y + 72.5z = 5300000 \end{array}\right\}$$

Resolvemos, por ejemplo, con la Regla de Cramer:

$$y = \frac{875000}{17.5} = 50000 \quad , \quad z = \frac{525000}{17.5} = 30000$$

Y sustituyendo en [3] nos sale ya el valor

$$x = 0.75\,(50000 + 30000) = 60000$$

Así, recibe 60000, 50000 y 30000 barriles de cada suministrador, respectivamente.