Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 03/04/2017	

EJERCICIO 1: [3]

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Comprueba que $A^2 = 2 \cdot I$ y deduce A^{101}.

b) [0,75] Demuestra que $B^2 + 2B = I$ y que $B^{-1} = B + 2I$.

c) [1] Resuelve la ecuación $BXB^{-1} - A = A^t$.

d) [0,5] Calcula x e y para que A y C conmuten.

EJERCICIO 2: [2,5]

Sea la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) [0,5] Determina los valores de λ para los que la matriz $D - 2I$ tiene inversa.

b) [1] Estudia el rango de $D - 2I$ según los valores de λ.

c) [1] Para $\lambda = 0$, calcule la inversa de $D - 2I$.

EJERCICIO 3: [2,5]

Sabiendo que el determinante de una matriz

$$E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

es 3, calcula indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [1,5] $\det(E^2)$, $\det\left(E^{-1}\right)$ y $\det\left(E + E^t\right)$.

b) [1] Los determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a & b & 4a - c \\ b & d & 4b - e \\ c & e & 4c - f \end{vmatrix}$$

EJERCICIO 4: [2]

Discute el rango de la siguiente matriz, según los valores de x:

$$F = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x+3 & x \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Calculamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathrm{I}$$

Tenemos así:

$$A^{101} = A^{100} \cdot A = \left(A^2\right)^{50} \cdot A = 2^{50} A$$

b) Efectuemos y comprobemos:

$$B^2 + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

De ahí obtenemos:

$$B^2 + 2B = B\,(B + 2\mathrm{I}) = \mathrm{I} \;\rightarrow\; B + 2\mathrm{I} = B^{-1}$$

c) Como B tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$BXB^{-1} + A = A^t = \mathrm{I} \;\rightarrow\; BXB^{-1} = A^t - A \;\rightarrow\; X = B^{-1}\left(A^t - A\right) \cdot B$$

La inversa de B la calculamos usando el apartado anterior y obtenemos

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Se tiene:

$$AC = CA \rightarrow \begin{pmatrix} x+2 & y-1 \\ x-2 & y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que sean iguales debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcc} x+y & = & x+2 \\ x-y & = & y-1 \\ x-2 & = & 1 \\ y+1 & = & 3 \end{array} \right| \rightarrow x = 3\,,\, y = 2$$

EJERCICIO 2:

$$D - 2\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det\left(D - 2\mathrm{I}\right) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \begin{array}{l} \nearrow \;\lambda = 1 \\ \searrow \;\lambda = 2 \end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\text{Si } \;\lambda = 1 \text{ ó } \lambda = 2 \;\rightarrow\; \det\left(D - 2\mathrm{I}\right) = 0 \;\rightarrow\; \text{No existe } \left(D - 2\mathrm{I}\right)^{-1}$$

$$\text{Si } \;\lambda \neq 1 \text{ y } \lambda \neq 2 \;\rightarrow\; \det\left(D - 2\mathrm{I}\right) \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Sí existe } \left(D - 2\mathrm{I}\right)^{-1}$$

b) Caso 1: $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$

$$\det(D-2\mathrm{I}) \neq 0 \;\rightarrow\; \mathrm{rg}(D-2\mathrm{I}) = 3$$

Caso 2: $\lambda = 1$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ y } \det(D-2\mathrm{I}) = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{rg}(D-2\mathrm{I}) = 2$$

Caso 3: $\lambda = 2$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ y } \det(D-2\mathrm{I}) = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{rg}(D-2\mathrm{I}) = 2$$

c) Según lo anterior, para $\lambda = 0$ es invertible.

$$\left.\begin{array}{l} \det(D-2\mathrm{I}) = -2 \\ \mathrm{Adj}(D-2\mathrm{I}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow (D-2\mathrm{I})^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 3:

a) Aplicamos que el determinante de un producto es el producto de los determinantes:

$$\det\left(E^2\right) = \det(E) \cdot \det(E) = 3 \cdot 3 = 9$$

El producto de la matriz por su inversa es la matriz unidad. Así

$$E \cdot E^{-1} = \mathrm{I} \overset{*}{\rightarrow} |E| \cdot |E^{-1}| = 1 \rightarrow |E^{-1}| = \frac{1}{3}$$

Calculamos la suma y vemos:

$$\det\left(E + E^t\right) = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

b) $\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{vmatrix} \overset{f_2 \leftrightarrow f_3}{=} 2 \cdot (-1) \cdot 3 = -6$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$$

EJERCICIO 4:

$$F = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x+3 & x \\ -1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos primero que hay un menor de orden dos distinto de cero:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculemos los orlados de orden tres de ese menor con la primera fila:

$$\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & 2 & x+3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\,(x-2)\,(x+1)$$

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\,(x-4)\,(x+1)$$

Caso 1: $x = -1$.

Todos los orlados son cero y por ello todos los menores de orden 3 son nulos (la fila f_3 es combinación lineal de las filas f_1 y f_2). Concluimos que el rango es 2.

Caso 2: $x \neq -1$.

Uno de los dos orlados no es cero, así que no se anulan simultáneamente. Por ello el rango es 3.

Resumiendo:

$$\begin{array}{lclcl} x = -1 & \rightarrow & \Delta_3^1 = \Delta_3^2 = 0\,,\Delta_2 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(F) = 2 \\ x \neq -1 & \rightarrow & \Delta_3^1 \neq 0 \text{ ó } \Delta_3^2 \neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(F) = 3 \end{array}$$