Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Matrices y Determinantes – 06/04/2017	

EJERCICIO 1: [3]

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & c & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Halle los valores de a , b y c para que se verifique $B \cdot C^t + 4A = \mathrm{O}$.

b) [1,5] Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = 3\mathrm{I}$.

c) [0,75] Obtén razonadamente A^{2016} y A^{2017}.

EJERCICIO 2: [2,5]

Sea D una matriz cuadrada con determinante -3 y cuyas respectivas filas son f_1 , f_2 , f_3 y designemos a la matriz identidad de orden 3 por I.

a) [1] Obtén razonadamente el determinante de las matrices $2D$ y D^{-1}.

b) [0,75] Averigüe el valor del determinante cuyas filas son

$$3f_1 \ , \ 2f_3 - f_1 \ , \ f_2$$

c) [0,75] Demuestra que no puede existir una matriz Y que cumpla $Y^t \cdot D \cdot Y = 3\mathrm{I}$.

EJERCICIO 3: [2,5]

Sea la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

a) [0,75] Determine para qué valores de λ tiene inversa la matriz $F = \lambda\mathrm{I} - E$.

b) [1] Obtenga la inversa de F para $\lambda = 1$.

c) [0,75] Estudie el rango de F según los valores de λ.

EJERCICIO 4: [2]

Discute el rango de la siguiente matriz, según los valores de x:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & x \\ x+2 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & x-2 & 5 & x+2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 1:

a) Efectuamos las operaciones:

$$B \cdot C^t - 4A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-6 & 0 \\ -b+c+1 & -2b-2 \end{pmatrix}$$

Para que sea igual a la matriz cero debe ser:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a-6 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -b+c+1 & = & 0 \\ -2b-2 & = & 0 \end{array} \right| \rightarrow \; a = 6\,,\; b = -1\,,\; c = -2$$

b) Como A tiene inversa, podemos despejar la matriz X :

$$X \cdot A - A^2 = 3\mathrm{I} \;\rightarrow\; X \cdot A = 3\mathrm{I} + A^2 \;\rightarrow\; X = \left(3\mathrm{I} + A^2\right) \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A:

$$\det(A) = 1 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos ahora el paréntesis:

$$3\mathrm{I} + A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por fin hallamos X :

$$X = \left(3\mathrm{I} + A^2\right) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

c) Calculando las potencias A^2, A^3, A^4,... deducimos por inducción que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ es par y } \quad A^n = \begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ es impar}$$

Luego, en particular:

$$A^{2016} = \begin{pmatrix} 1 & -2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{2017} = \begin{pmatrix} -1 & 2017 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

a) $\det(2D) = \det[2f_1\,, 2f_2\,, 2f_3] = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-3) = -24$

$D \cdot D^{-1} = \mathrm{I} \overset{*}{\rightarrow} |D| \cdot |D^{-1}| = 1 \rightarrow |D^{-1}| = -\dfrac{1}{3}$

b) Descomponemos $\det[3f_1\,, 2f_3 - f_1\,, f_2]$ en suma de dos:

$$\Delta = \det[3f_1\,, 2f_3\,, f_2] - \det[3f_1\,, f_1\,, f_2] = 3 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-3) - 0 = 18$$

c) Como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores". Así

$$|Y^t| \cdot |D| \cdot |Y| = |3\mathrm{I}| \rightarrow |Y| \cdot (-3) \cdot |Y| = 27 \rightarrow |Y|^2 = -9 \rightarrow \text{NO}$$

EJERCICIO 3:

a) Calculemos su determinante y veamos cuándo es cero.

$$\det(F)=\det\begin{pmatrix}\lambda-7 & -1 & 2\\ 0 & \lambda & 0\\ -28 & -4 & \lambda+8\end{pmatrix}=\lambda^3+\lambda^2=\lambda^2(\lambda+1)=0\ \begin{array}{l}\nearrow\ \lambda=-1\\ \searrow\ \lambda=0\end{array}$$

De ahí deducimos:

$$\begin{array}{lllll}\text{Si } \lambda=-1 \text{ ó } \lambda=0 & \rightarrow & \det(F)=0 & \rightarrow & \text{No existe } F^{-1}\\ \text{Si } \lambda\neq-1 \text{ y } \lambda\neq 0 & \rightarrow & \det(F)\neq 0 & \rightarrow & \text{Sí existe } F^{-1}\end{array}$$

b) Según lo anterior, para $\lambda=1$ es F invertible.

$$\left.\begin{array}{l}\det(F)=1^3+1^2=2\\ \mathrm{Adj}(F)=\begin{pmatrix}9 & 0 & 28\\ 1 & 2 & 4\\ -2 & 0 & -6\end{pmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow F^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}9 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ 28 & 4 & -6\end{pmatrix}$$

c) Caso 1: $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq 0$.

Tenemos que $\det(F)\neq 0$ siendo F cuadrada de orden 3. Luego $\mathrm{rg}(F)=3$.

Caso 2: $\lambda=-1$.

$\Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$ y $\det(F)=0$, así que es $\mathrm{rg}(F)=2$.

Caso 3: $\lambda=0$.

$\Delta_1=\det(-1)\neq 0$ y todos los menores de orden 2 son cero, así que es $\mathrm{rg}(F)=1$.

EJERCICIO 4:

Vemos que hay un menor de orden no nulo y calculamos sus orlados de orden tres con la tercera fila

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 5\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\Delta_3^1=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ x+2 & 1 & 5\\ 4 & x-2 & 5\end{vmatrix}=5\,(x-1)\quad,\quad \Delta_3^2=\begin{vmatrix}-2 & 0 & x\\ 1 & 5 & 2\\ x-2 & 5 & x+1\end{vmatrix}=5x\,(1-x)$$

Caso 1: $x\neq 1$.

El primer orlado no es cero. Por ello el rango es 3.

Caso 2: $x=1$.

Todos los orlados son cero y por ello todos los menores de orden 3 son nulos (la fila f_3 es combinación lineal de las filas f_1 y f_2). Concluimos que el rango es 2.

Resumiendo:

$$\begin{array}{lllll}x\neq 1 & \rightarrow & \Delta_3^1\neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(G)=3\\ x=1 & \rightarrow & \Delta_3^1=\Delta_3^2=0\,,\Delta_2\neq 0 & \rightarrow & \mathrm{rg}(G)=2\end{array}$$