Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Integral definida – 03/03/2017	

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \ln(x) - 1$$

Obtén el área del recinto delimitado por su gráfica, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = \mathrm{e}^2$.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función $f : [1\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 4\sqrt{x-1}$$

a) [0,5] Demuestra que la recta $y = x + 3$ es tangente a la gráfica de f para $x = 5$.

b) [2] Dibuja y halla el área del recinto limitado por el eje de abscisas, la gráfica de f y la recta tangente anterior.

EJERCICIO 3:

a) [1] Estudia la monotonía y determina los extremos de la función F definida por

$$F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\mathrm{e}^t + 2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

b) [1,5] Calcula

$$\int_{-1}^{2} x\,|x-1|\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos para $a > 0$ constante las funciones $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 - ax \quad , \quad g(x) = ax$$

a) [0,5] Esboza el recinto determinado por las gráficas de ambas.

b) [2] Determina para qué valor de $a > 0$ dicho recinto tiene un área igual a $36\,\mathrm{u}^2$.

EJERCICIO 1:

Primero calculemos los ceros para ver los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas:

$$\ln x - 1 = 0 \to \ln x = 1 \to x = \mathrm{e}$$

Como ese número está entre $x = 1$ y $x = \mathrm{e}^2$ calculamos separadamente las integrales definidas de $x = 1$ hasta $x = \mathrm{e}$ y de $x = \mathrm{e}$ hasta $x = \mathrm{e}^2$.

Obtengamos la primitiva siguiente por partes:

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int \underset{i}{1}\,\underset{d}{\ln x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

Aplicando la Regla de Barrow:

$$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x - x - x\Big]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = \Big[x\ln x - 2x\Big]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} = -\mathrm{e} + 2 < 0 \to \mathscr{A}_1 = \mathrm{e} - 2 \ (\mathrm{u}^2)$$

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} (\ln x - 1)\ \mathrm{d}x = \Big[x\ln x - x - x\Big]_{x=\mathrm{e}}^{x=\mathrm{e}^2} = \Big[x\ln x - 2x\Big]_{x=\mathrm{e}}^{x=\mathrm{e}^2} = \mathrm{e} > 0 \to \mathscr{A}_2 = \mathrm{e} \ (\mathrm{u}^2)$$

Luego el área del recinto es:

$$a(\mathscr{R}) = \mathrm{e} - 2 + \mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 \ (\mathrm{u}^2)$$

EJERCICIO 2:

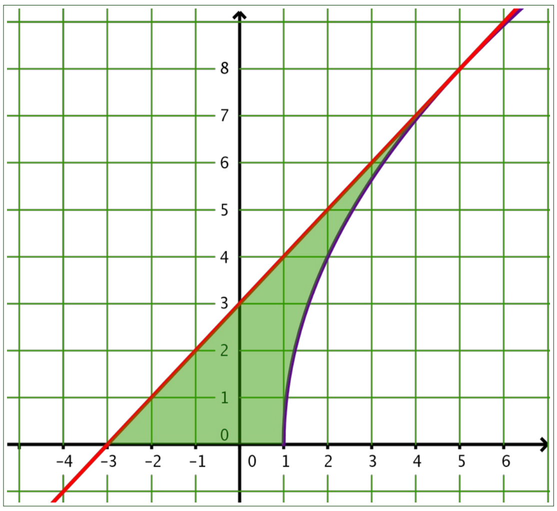
a) Ante todo derivamos:

$$f(x) = 4\sqrt{x-1} \ \to \ f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

Veamos que la recta tangente para dicho valor es la recta dada:

$$y - f(5) = f'(5)\cdot(x-5) \ \to \ y - 8 = 1\cdot(x-5) \ \to \ y = x + 3$$

b) La gráfica de f es parabólica. El recinto lo tenemos aquí:



Su área podemos calcularla como la resta de las áreas de:

$\triangle(ABC)$ con $A(5\,,0)$, $B(5\,,8)$, $C(-3\,,0)$

$\triangle(ABD)$ con $A(5\,,0)$, $B(5\,,8)$, $D(1\,,0)$ - curvilíneo-

Ésta es la que forma la gráfica de f con el eje de abscisas entre $x = 1$ y $x = 5$:

$$a(\mathscr{R}) = 8\times 8 : 2 - \int_1^5 4\,(x-1)^{1/2}\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_1^5 4\,(x-1)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[4\cdot\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\right]_{x=1}^{x=5} = \frac{64}{3}$$

Luego el área es:

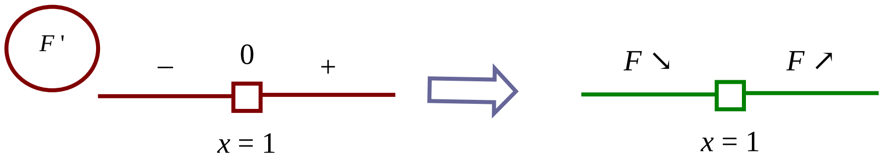
$$a(\mathscr{R}) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}\ \mathrm{u}^2$$

EJERCICIO 3:

a) Como el integrando es continuo (el denominador nunca se anula), el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivada de la función integral es el integrando:

$$F'(x) = \frac{x-1}{\mathrm{e}^x + 2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

El estudio de signo de la derivada es simple:



Deducimos que para $x = 1$ hay un mínimo absoluto.

b) Expresamos el integrando como una función a trozos. Los ceros del interior del valor absoluto:

$$x - 1 = 0 \to x = 1$$

Resulta así:

$x \geq 1 \;\to\; |x-1| = x - 1 \;\to\; x\,|x+1| = x\,(x-1) = x^2 - x$

$x < 1 \;\to\; |x-1| = -x + 1 \;\to\; x\,|x+1| = x\,(-x+1) = -x^2 + x$

Así que separamos la integral en dos:

$$\int_{-1}^{2} x\,|x-1|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (-x^2 + x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (x^2 - x)\,\mathrm{d}x$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_{-1}^{2} x\,|x-1|\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = -\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

EJERCICIO 4:

Las gráficas son una parábola convexa y una recta creciente. La parábola corta al eje de abscisas para $x = 0$ y para $x = a$.

Para averiguar dónde se cortan la curva y la recta igualamos sus fórmulas:

$$x^2 - ax = ax \;\to\; x^2 - 2ax = 0 \;\to\; x\,(x - 2a) = 0 \;\to\; x = 0\,, x = 2a$$

Calculamos la integral:

$$\int_0^{2a} (x^2 - ax - ax)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - ax^2\right]_{x=0}^{x=2a} = \frac{8a^3}{3} - 4a^3 = -\frac{4a^3}{3}$$

Luego:

$$a\,(\mathscr{R}) = \frac{4a^3}{3}\ \mathrm{u}^2$$

Igualando obtendremos el valor de la constante:

$$\frac{4a^3}{3} = 36 \;\to\; a^3 = 27 \;\to\; a = 3$$