Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 31/01/2017	

EJERCICIO 1:

Determina la expresión de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su derivada viene dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 3\,\mathrm{e}^{2x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \cos(\pi x) + 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y cuya gráfica corta al eje de abscisas para $x = 2$.

EJERCICIO 2:

Halla la integral indefinida de la función definida por

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} \cos(x)$$

EJERCICIO 3:

Obtén

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x = t^3$

EJERCICIO 4:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x} \, \mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\int \csc^2(3x) \, \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{2}{\sqrt{1-25x^2}} \, \mathrm{d}x$

c) $\int \cot(3x) \, \mathrm{d}x$

d) $\int x^2 \left(x^3+1\right)^5 \, \mathrm{d}x$

Observación: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse, los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

Integrando cada trozo:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}+a & \text{si} \quad x\leq 0\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)+2x+b & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Sabemos que su gráfica corta al eje de abscisas para $x=2$:

$$f(2)=0\ \rightarrow\ 0+4+b=0\ \rightarrow\ b=-4$$

Al existir derivada para $x=0$, debe ser continua en $x=0$:

$$f(0-)=f(0+)\ \rightarrow\ \frac{3}{2}+a=b\ \xrightarrow{b=-4}\ a=-\frac{11}{2}$$

Definitivamente nos queda

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{11}{2} & \text{si} \quad x\leq 0\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x)+2x-4 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

EJERCICIO 2:

Integramos usando la integración por partes, dejando para derivar la parte exponencial y tomando para integrar la parte trigonométrica:

$$I=\int\underset{d}{\underline{\mathrm{e}^{2x}}}\,\underset{i}{\underline{\cos x}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}x-\int 2\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x$$

Y volvemos a integrar por partes con la misma elección, claro:

$$I=\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}x-\left[-2\,\mathrm{e}^{2x}\cos x+\int 4\,\mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x\right]=\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}x+2\,\mathrm{e}^{2x}\cos x-4I$$

Nos vuelve a salir la integral original. Ahora despejamos de ahí la integral, quedándonos

$$\int\mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{2x}\left(\operatorname{sen}x+2\cos x\right)+C$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x=t^3\rightarrow \mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I=\int\frac{t}{t^3+t}\cdot 3t^2\,\mathrm{d}t=\int\frac{3t^3}{t\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{3t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(3t^2\right):\left(t^2+1\right)\ \rightarrow\ \begin{cases}c=3\\ r=-3\end{cases}$$

Así:

$$I = \int \left(3 + \frac{-3}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t = 3t - 3\arctan t + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \sqrt[3]{x}$:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}} \,\mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x} - 3\arctan \sqrt[3]{x} + C$$

EJERCICIO 4:

Comprobado que el grado del numerador es el menor y que no es una logarítmica directa, veamos los ceros del denominador:

$$x^2 + x = 0 \;\to\; x\,(x+1) = 0 \;\to\; x = 0\,, x = -1$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{x-2}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \text{ (*)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$x - 2 = a\,(x+1) + bx \;\longrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \text{si } x = 0 \to -2 = a \to a = -2 \\ \text{si } x = -1 \to -3 = -b \to b = 3 \end{array}\right. \text{ (**)}$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int \frac{x-2}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x+1}\,\mathrm{d}x = -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo cotangente con $u = 3x$:

$$I = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(3x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3}{\operatorname{sen}^2(3x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cot(3x) + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 5x$:

$$I = \frac{2}{5}\int \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\operatorname{arcsen}(5x) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \operatorname{sen}(3x)$:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos(3x)}{\operatorname{sen}(3x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|\operatorname{sen}(3x)| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = x^3 + 1$:

$$I = \frac{1}{3}\int 3x^2\left(x^3+1\right)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{\left(x^3+1\right)^6}{6} + C = \frac{1}{18}\left(x^3+1\right)^6 + C$$