Nombre:____ *Curso*:_____
Matemáticas II – Cálculo de Primitivas – 30/01/2017

EJERCICIO 1:

Halla la expresión de la primitiva de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \cos(4x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(\pi, 1)$.

EJERCICIO 2:

Obtén la expresión de la función $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que presenta un extremo en el punto $P(1, 2)$ y cuya derivada segunda es

$$g''(x) = \frac{2}{x}$$

EJERCICIO 3:

Obtén la integral indefinida

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia: $x = 4t^2$

EJERCICIO 4:

Calcula la siguiente integral de función racional:

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 9x}\,\mathrm{d}x$$

EJERCICIO 5:

Calcula las siguientes integrales de formas compuestas:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1-4x^4}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{-2}{\cos^2(3x)}\,\mathrm{d}x$

<u>Observación</u>: el ejercicio 5 es voluntario. Si no se resuelve, los cuatro problemas anteriores tendrán todos una valoración máxima de 2,5 puntos. En caso de resolverse, los cinco ejercicios se valorarán con un máximo de 2 puntos.

EJERCICIO 1:

Integramos cada trozo:

$$F\left(x\right)=\begin{cases} -\dfrac{2}{3}\left(1-x\right)^{3/2}+a & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}\left(4x\right)+b & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Sabemos que su gráfica pasa por el punto $(\pi\,,1)$:

$$F\left(\pi\right)=1\ \rightarrow\ 0+b=1\ \rightarrow\ b=1$$

Al existir derivada para $x=0$, debe ser continua en $x=0$:

$$F\left(0-\right)=F\left(0+\right)\ \rightarrow\ -\frac{2}{3}+a=0+b\ \xrightarrow{b=1}\ a=\frac{5}{3}$$

Definitivamente nos queda

$$F\left(x\right)=\begin{cases} -\dfrac{2}{3}\left(1-x\right)^{3/2}+\dfrac{5}{3} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}\left(4x\right)+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2:

Si tiene un extremo en dicho punto entonces $g\left(1\right)=2$ y $g'\left(1\right)=0$.

La derivada primera es la integral de la derivada segunda:

$$g'\left(x\right)=\int\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x=2\ln x+C$$

Calculemos esa constante:

$$g'\left(1\right)=0\ \rightarrow\ 2\ln 1+C=0\ \rightarrow\ C=0$$

Y la función es la integral de la derivada primera. Lo haremos por partes:

$$g\left(x\right)=\int\underbrace{2}_{i}\,\underbrace{\ln x}_{d}\,\mathrm{d}x=2x\ln x-\int 2x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=2x\ln x-2x+D$$

Calculemos esa constante:

$$g\left(1\right)=2\ \rightarrow\ 2\ln 1-2+D=2\ \rightarrow\ D=4$$

Queda, simplificando

$$g\left(x\right)=2x\ln x-2x+4$$

EJERCICIO 3:

Vamos a realizar el cambio de variable sugerido:

$$x=4t^2\rightarrow\mathrm{d}x=8t\,\mathrm{d}t$$

La integral queda:

$$I=\int\frac{\sqrt{4t^2}}{4+4t^2}\cdot 8t\,\mathrm{d}t=\int\frac{16t^2}{4\left(t^2+1\right)}\,\mathrm{d}t=\int\frac{4t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vemos que es una integral racional, donde haciendo la división:

$$\left(4t^2\right) : \left(t^2+1\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} c=4 \\ r=-4 \end{cases}$$

Así:

$$I = \int \left(4 + \frac{-4}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = 4t - 4 \arctan t + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$:

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - 4 \arctan \frac{\sqrt{x}}{2} + C$$

EJERCICIO 4:

El grado del numerador es el menor y no es una logarítmica directa. Veamos los ceros del denominador:

$$x^3 - 9x = 0 \;\rightarrow\; x\left(x^2-9\right) = 0 \;\rightarrow\; x = 0, x = -3\,, x = 3$$

Tenemos así que podemos descomponer en fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x\,(x+3)\,(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-3} \text{ (*)}$$

Efectuando e igualando los numeradores:

$$x+1 = a\,(x-3)\,(x-3) + bx\,(x-3) + cx\,(x+3) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \text{si } x=1 \rightarrow 1 = -9a \rightarrow a = -\frac{1}{9} \\ \text{si } x=-3 \rightarrow -2 = 18b \rightarrow b = -\frac{1}{9} \text{ (**)} \\ \text{si } x=3 \rightarrow 4 = 18c \rightarrow c = \frac{2}{9} \end{cases}$$

De (*) y (**) resulta:

$$\int \frac{x+1}{x^3-9x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{9}\ln|x+3| + \frac{2}{9}\ln|x-3| + C$$

EJERCICIO 5:

a) Es una integral compuesta de tipo potencial con $u = \ln x$:

$$I = \int (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,(\ln x)^4 + C$$

b) Es una integral compuesta de tipo arco-seno con $u = 2x^2$:

$$I = \frac{3}{4}\int \frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\operatorname{arcsen}\left(2x^2\right) + C$$

c) Es una integral compuesta de tipo logarítmica con $u = \cos x$:

$$I = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

d) Es una integral compuesta de tipo tangente con $u = 3x$:

$$I = -\frac{2}{3}\int \frac{3}{\cos^2(3x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\tan(3x) + C$$