Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Aplicaciones de las Derivadas – 23/12/2016	

EJERCICIO 1:

Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{1-x} & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) [1,25] Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) [1,25] Estudia su continuidad y derivabilidad.

c) [0,5] Escribe la ecuación de la recta tangente para $x=\mathrm{e}$.

EJERCICIO 2:

La gráfica de la función f definida como sigue presenta un extremo relativo en el punto $(-1,-2)$.

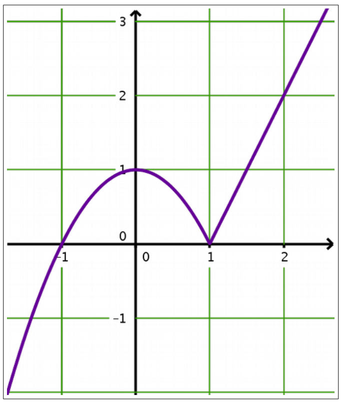
$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x-1} \qquad (x\neq 1)$$

a) [1] Demuestra que ha de ser $a=1$ y $b=3$.

b) [1] Calcula sus valores extremos en el intervalo compacto $[2,6]$.

c) [1] Obtén las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 3:



Vemos la gráfica de la derivada de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) [0,5] ¿Es derivable la función en todos sus puntos? ¿Y dos veces derivable?

b) [0,5] Haz un esquema de monotonía de f. ¿Dónde presenta la gráfica $y=f(x)$ sus extremos?

c) [0,5] Determina los intervalos en los que la curva $y=f(x)$ es cóncava o convexa. ¿Tiene puntos de inflexión?

d) [0,5] Sabiendo que el punto $P(2,1)$ está en la gráfica de f, escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en dicho punto.

EJERCICIO 4: [2,5]

En un pueblo se quiere cercar un recinto rectangular cerrado para celebrar las fiestas, aprovechando una tapia existente como uno de los lados y dispone de 500 metros de tela metálica para hacer los otros tres.

a) [2] ¿Podrías indicar las dimensiones del recinto acotado de esa forma cuya área es la mayor posible?

b) [0,5] La comisión de fiestas estima que para atracciones, escenario, etc necesitan 30000 m^2. Teniendo en cuenta los cálculos anteriores, ¿será suficientemente grande el recinto anterior?

EJERCICIO 1:

a) Los límites en el infinito son:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(1-\mathrm{e}^{1-x}\right) = 1-\mathrm{e}^{+\infty} = 1-(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\ln(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

b) La función sólo puede ser discontinua para $x=1$, pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. Veamos:

Valor: $f(1) = 1-\mathrm{e}^0 = 1-1 = 0$

Límites: $$\lim_{x\to1} f(x) \begin{cases} f(1-) = 0 \\ f(1+) = \dfrac{\ln 1}{1} = 0 \end{cases}$$

Concluimos que es continua para $x=1$ y, por tanto, en todo punto.

c) Podemos derivar directamente para $x\neq1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{1-x}\cdot(-1) = \mathrm{e}^{1-x} & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln(x)}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Para $x=1$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'(1-) = \mathrm{e}^0 = 1 \\ f'(1+) = \dfrac{1-\ln 1}{1} = 1 \end{cases}$$

Concluimos que f es derivable en el separa-fórmulas también y por ello:

$$f'(x) = \begin{cases} 4\,\mathrm{e}^{1-x} & \text{si} \quad x\leq1 \\ \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

d) La ecuación de la tangente es:

$$y - f(\mathrm{e}) = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) \to y - \frac{1}{\mathrm{e}} = 0\cdot(x-\mathrm{e}) \to y = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

EJERCICIO 2:

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x-1} \;\to\; f'(x) = \frac{2ax(x-2)-\left(ax^2+b\right)}{(x-1)^2} = \frac{ax^2-2ax-b}{(x-1)^2}$$

a) Si en $(-1\,,-2)$ hay un extremo relativo deducimos dos cosas:

La derivada es cero: $f'(-1) = 0 \;\to\; a+2a-b=0 \;\to\; 3a-b=0$ [*]

La gráfica pasa por ese punto: $f(-1) = -2 \;\to\; \dfrac{a+b}{-2} = -2 \;\to\; a+b=4$ [**]

Sumando ambas obtenemos $a=1$ y sustituyendo en cualquiera $b=3$.

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \to x = -1 \ , \ x = 3$$

Vamos a construir una tabla de variación de la función en el intervalo compacto dado:

x	2		3		6
y	10	↘	9	↗	10.8

El valor mínimo (absoluto) es $y = 9$, para $x = 3$.

El valor máximo (absoluto) es $y = 10.8$, para $x = 6$.

c) <u>Asíntotas verticales</u>: sólo puede haber discontinuidad de salto infinito en el cero del denominador:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{4}{0}\right] = \pm\infty$$

Concluimos que $x = 1$ es una asíntota vertical.

<u>Asíntota horizontal</u>: calculemos el límite en el infinito.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+3}{x-1} \overset{*}{=} \pm\infty$$

Concluimos que no hay asíntota horizontal.

<u>Asíntota oblicua</u>: podría haber una asíntota $y = mx + n$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} \overset{*}{=} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x-1} \overset{*}{=} \frac{1}{1} = 1$$

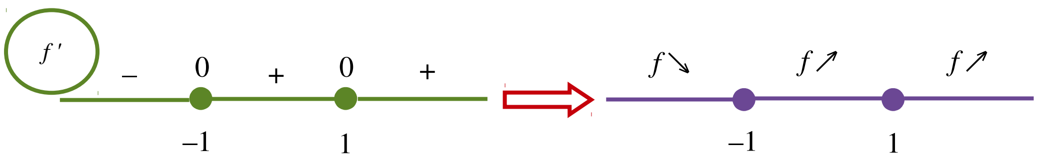
Concluimos que $y = x + 1$ es una asíntota oblicua.

Nota: en (*) hemos usado la regla de los grados.

EJERCICIO 3:

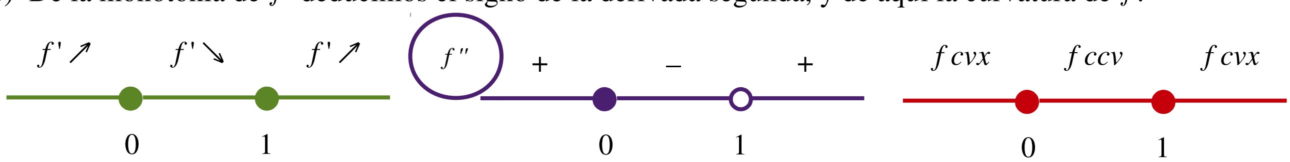
a) Apreciamos que existe $f'(x)$ para todo x, y se puede derivar dos veces en todo punto salvo $x = 1$, donde $y = f'(x)$ presenta un punto anguloso.

b) Con la gráfica determinamos directamente el signo de la derivada, y de ahí la monotonía de la función:



Para $x = -1$ la función f tiene el único extremo relativo, que es un mínimo absoluto. Observemos que para $x = 1$ hay un punto de silla.

c) De la monotonía de f' deducimos el signo de la derivada segunda, y de aquí la curvatura de f:



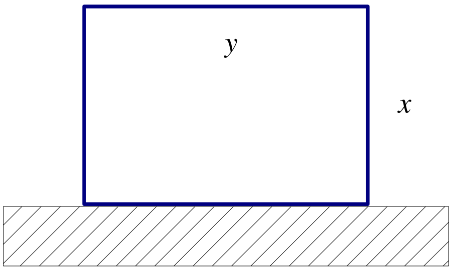
Concluimos que f presenta puntos de inflexión para $x = 0$ y $x = 1$.

d) Si la gráfica de f pasa por $P(2\,,1)$, entonces es $f(2)=1$ y en la gráfica de la derivada vemos $f'(2)=2$:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\to y-1=2\cdot(x-2)\to y=2x-3$$

EJERCICIO 4:

[Variables y magnitud que debemos optimizar]



Llamamos x a la longitud del lado perpendicular a la tapia e y a la del lado paralelo a esa tapia.

Queremos maximizar la superficie del recinto rectangular:

$$S=xy$$

[Ligadura]

Como tenemos 500 metros de tela metálica:

$$L=500\to y+2x=500\to y=500-2x$$

[Función]

La función que nos da la superficie queda

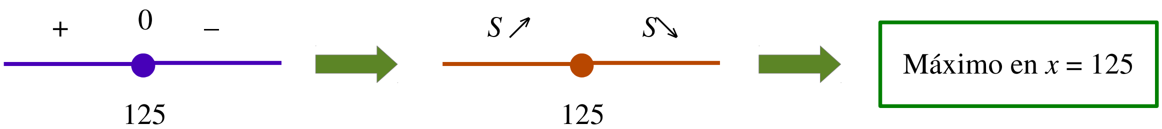
$$S=x\cdot(500-2x)=500x-2x^2$$

[Derivada / Extremo]

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'=500-4x=0\to x=125$$

Estudiemos el signo de la derivada y deduzcamos la variación de S:



Concluimos que el recinto debe tener 125 metros perpendiculares a la tapia y 250 metros junto a ella.

La superficie de ese recinto es $S=125\cdot250=31250\ \mathrm{m}^2$, así que es suficiente para cubrir las necesidades.