Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 01/12/2016	

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax + \dfrac{b}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) [1,5] Halla a, b y c para que sea continua y para que sea $(2\,,4)$ un punto de su gráfica con tangente horizontal.

b) [1] Para $a = 1$, $b = 4$ y $c = -4$ hay un punto de la gráfica cuya tangente pasa por el origen de coordenadas. Averigua las coordenadas de dicho punto.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1} \qquad (x \neq 0)$$

Determina las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función $f : (0\,,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f\,(x) = x \ln{(x)}$$

a) [1,25] Calcula $\lim\limits_{x \to 0+} f\,(x)$.

b) [1,25] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f paralela a $2x - y = 0$.

EJERCICIO 4: [2,5]

Estudiemos si la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 9x^2 - 12x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 8\sqrt{2x-2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es derivable en todo punto y verifica $f\,(-1) = f\,(3)$.

¿Existe algún valor ξ en el intervalo $(-1\,,3)$ en el que la tangente sea horizontal?

EJERCICIO 1:

a) Sólo podría ser discontinua para $x = 1$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. En dicho punto el valor y los límites son:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^2 - c = 1 - c \\ f(1-) = 1 - c \\ f(1+) = a + \dfrac{b}{1} = a + b \end{array}\right\} \xrightarrow{continua} 1 - c = a + b$$

Si la gráfica pasa por el punto $(2\,,4)$, entonces:

$$f(2) = 4 \to 2a + \frac{b}{2} = 4 \xrightarrow{\cdot 2} 4a + b = 8$$

Si la gráfica en el punto $(2\,,4)$ tiene tangente horizontal, entonces para $x = 2$ la pendiente es cero:

$$f'(2) = 0 \to a - \frac{b}{4} = 0 \xrightarrow{\cdot 4} 4a - b = 0$$

Sumando las dos últimas igualdades obtenemos $a = 1$ y sustituyendo $b = 4$. Volviendo a la primera condición ya obtenemos $c = -4$.

b) Colocando esos valores y derivando directamente cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x + \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \xrightarrow{D} f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{4}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

La recta tangente a la gráfica para $x = x_0 < 1$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \to y - x_0^2 - 4 = 2x_0(x - x_0)$$

Como pasa por $(0\,,0)$, colocamos ahí $x = 0$ e $y = 0$:

$$0 - x_0^2 - 4 = 2x_0(0 - x_0) \to -x_0^2 - 4 = -2x_0^2 \to x_0^2 = 4 \to x_0 = -2$$

Así, la recta tangente que pasa por el origen hay que trazarla desde el punto $(-2\,,8)$.

EJERCICIO 2:

Asíntotas verticales: igualemos a cero el denominador buscando un salto infinito:

$$\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0 \longrightarrow \mathrm{e}^{2x} = 1 \longrightarrow 2x = 0 \longrightarrow x = 0$$

Calculemos el límite para asegurarnos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

Es $x = 0$ asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\infty} + 1}{\mathrm{e}^{-\infty} - 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \to y = -1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\mathrm{e}^{+\infty} + 1}{\mathrm{e}^{+\infty} - 1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{*}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\,\mathrm{e}^{2x}} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\right) = 0 \to y = 0$$

Asíntotas oblicuas: no puede haber por tener horizontales tanto para $x \to -\infty$ como $x \to +\infty$.

EJERCICIO 3:

a) $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty)$

Obtenemos una indeterminación. Para resolverla, vamos a usar un conocido truco: escribir el producto como una división para así poder aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

b) Lo primero, derivar (derivada de un producto):

$$f(x) = x \ln(x) \xrightarrow{D} f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Si buscamos una tangente paralela a la recta dada, tendrá la misma pendiente que ella:

$$2x - y = 0 \rightarrow y = 2x \rightarrow m = 2$$

Recordemos que la pendiente de la tangente es la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'(x_0) = m \rightarrow \ln(x_0) + 1 = 2 \rightarrow \ln(x_0) = 1 \rightarrow x_0 = \mathrm{e}$$

La recta tangente para $x = \mathrm{e}$ es:

$$y - f(\mathrm{e}) = f'(\mathrm{e}) \cdot (x - \mathrm{e}) \rightarrow y - \mathrm{e} = 2(x - \mathrm{e}) \rightarrow y = 2x - \mathrm{e}$$

EJERCICIO 4:

Comprobemos si se verifican las tres condiciones.

H1: Veamos si es $f(-1) = f(3)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 4(-1)^3 - 9(-1)^2 - 12(-1) - 1 = 16 \\ f(3) = 8\sqrt{4} = 16 \end{array}\right\} \rightarrow f(-1) = f(3)$$

H2: Veamos si f es continua. Como sólo puede ser discontinua en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 4 + 9 - 12 - 1 = 0 \\ f(1-) = 0 \\ f(1+) = 8\sqrt{0} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \text{continua en } x = 0 \rightarrow \text{continua en } [-1\,,3]$$

H3: Veamos si es f derivable:
Podemos derivar directamente si $x \neq 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 12x^2 + 18x - 12 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{8}{\sqrt{2x-2}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para $x = 1$, como es continua:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1-) = 12 + 18 - 12 = 0 = 18 \\ f'(1+) = \dfrac{8}{0} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{no derivable en } x = 1$$

Veamos si existe $\xi \in (-1\,,3)$ tal que $f'\,(\xi) = 0$ (tangente horizontal si pendiente = derivada = 0):

Igualemos a cero la derivada:

$$\frac{8}{\sqrt{2x-2}} = 0 \;\rightarrow\; 8 = 0 \;\rightarrow\; \text{NO}$$

$$12x^2 + 18x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = -2\,, x = \frac{1}{2}$$

Sí, es $\xi = \dfrac{1}{2}$.