

Nombre: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 01/12/2016



EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c & \text{si } x \leq 1 \\ ax + \frac{b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- [1,5] Halla  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que sea continua y para que sea  $(2, 4)$  un punto de su gráfica con tangente horizontal.
- [1] Para  $a = 1$ ,  $b = 4$  y  $c = -4$  hay un punto de la gráfica cuya tangente pasa por el origen de coordenadas. Averigua las coordenadas de dicho punto.

EJERCICIO 2: [2,5]

Consideremos la función  $f$  definida por

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 1} \quad (x \neq 0)$$

Determina las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = x \ln(x)$$

- [1,25] Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .
- [1,25] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  paralela a  $2x - y = 0$ .

EJERCICIO 4: [2,5]

Consideremos la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 9x^2 - 12x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 8\sqrt{2x - 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- [1,5] Estudia si verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo  $[-1, 3]$ .
- [1] Estudia si cumple la tesis de dicho teorema en ese intervalo, intentando hallar el valor medio  $\xi$  que aparece en ella.

## EJERCICIO 1:

- a) Sólo podría ser discontinua para  $x = 1$  (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua en su trozo del dominio. En dicho punto el valor y los límites son:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 1^2 - c = 1 - c \\ f(1-) = 1 - c \\ f(1+) = a + \frac{b}{1} = a + b \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{continua}} 1 - c = a + b$$

Si la gráfica pasa por el punto  $(2, 4)$ , entonces:

$$f(2) = 4 \rightarrow 2a + \frac{b}{2} = 4 \xrightarrow{\cdot 2} 4a + b = 8$$

Si la gráfica en el punto  $(2, 4)$  tiene tangente horizontal, entonces para  $x = 2$  la pendiente es cero:

$$f'(2) = 0 \rightarrow a - \frac{b}{4} = 0 \xrightarrow{\cdot 4} 4a - b = 0$$

Sumando las dos últimas igualdades obtenemos  $a = 1$  y sustituyendo  $b = 4$ . Volviendo a la primera condición ya obtenemos  $c = -4$ .

- b) Colocando esos valores y derivando directamente cada trozo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ x + \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \xrightarrow{D} f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{4}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La recta tangente a la gráfica para  $x = x_0 < 1$  es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow y - x_0^2 - 4 = 2x_0(x - x_0)$$

Como pasa por  $(0, 0)$ , colocamos ahí  $x = 0$  e  $y = 0$ :

$$0 - x_0^2 - 4 = 2x_0(0 - x_0) \rightarrow -x_0^2 - 4 = -2x_0^2 \rightarrow x_0^2 = 4 \rightarrow x_0 = -2$$

Así, la recta tangente que pasa por el origen hay que trazarla desde el punto  $(-2, 8)$ .

## EJERCICIO 2:

Asíntotas verticales: igualemos a cero el denominador buscando un salto infinito:

$$e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Calculemos el límite para asegurarnos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

Es  $x = 0$  asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{e^{-\infty} + 1}{e^{-\infty} - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1 \rightarrow y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{e^{+\infty} + 1}{e^{+\infty} - 1} = \left[ \frac{+\infty}{+\infty} \right]^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} e^{-x} \right) = 0 \rightarrow y = 0$$

Asíntotas oblicuas: no puede haber por tener horizontales tanto para  $x \rightarrow -\infty$  como  $x \rightarrow +\infty$ .

## EJERCICIO 3:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty)$$

Obtenemos una indeterminación. Para resolverla, vamos a usar un conocido truco: escribir el producto como una división para así poder aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left[ \frac{-\infty}{+\infty} \right] \stackrel{\text{L'Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

b) Lo primero, derivar (derivada de un producto):

$$f(x) = x \ln(x) \xrightarrow{D} f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Si buscamos una tangente paralela a la recta dada, tendrá la misma pendiente que ella:

$$2x - y = 0 \rightarrow y = 2x \rightarrow m = 2$$

Recordemos que la pendiente de la tangente es la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'(x_0) = m \rightarrow \ln(x_0) + 1 = 2 \rightarrow \ln(x_0) = 1 \rightarrow x_0 = e$$

La recta tangente para  $x = e$  es:

$$y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e) \rightarrow y - e = 2(x - e) \rightarrow y = 2x - e$$

## EJERCICIO 4:

Comprobemos si se verifican las tres hipótesis.

H1: Veamos si es  $f(-1) = f(3)$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 4(-1)^3 - 9(-1)^2 - 12(-1) - 1 = 16 \\ f(3) = 8\sqrt{4} = 16 \end{array} \right\} \rightarrow f(-1) = f(3)$$

H2: Veamos si  $f$  es continua en  $[-1, 3]$ .

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 4 + 9 - 12 - 1 = 0 \\ f(1-) = 0 \\ f(1+) = 8\sqrt{0} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{continua en } x = 0 \rightarrow \text{continua en } [-1, 3]$$

H3: Veamos si es  $f$  derivable en  $[-1, 3]$ :

Podemos derivar directamente si  $x \neq 1$ :

$$f'(x) = \begin{cases} 12x^2 + 18x - 12 & \text{si } x < 1 \\ \frac{8}{\sqrt{2x-2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para  $x = 1$ , como es continua:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1-) = 12 + 18 - 12 = 0 = 18 \\ f'(1+) = \frac{8}{0} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{no derivable en } x = 1$$

Así que no cumple esta hipótesis

TESIS: Veamos si existe  $\xi \in (-1, 3)$  tal que  $f'(\xi) = 0$ :

Igualemos a cero la derivada:

$$\frac{8}{\sqrt{2x-2}} = 0 \rightarrow 8 = 0 \rightarrow \text{NO}$$

$$12x^2 + 18x - 12 = 0 \rightarrow x = -2, x = \frac{1}{2}$$

Sí se cumple la tesis y el valor medio que aparece en ella es  $\xi = \frac{1}{2}$ .