

Nombre: _____

Curso: _____

Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 21/11/2016

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- [0,5] Estudia su continuidad.
- [1,25] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.
- [0,75] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2,5]

Halla a , b y c para que la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 1 \\ 2\sqrt{3x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en todo punto y cumpla $f(0) = f(2)$.

Calcula en qué abscisa del intervalo $(0, 2)$ se anula su derivada.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \ln(x)$$

- [1,25] Demuestra que la recta de ecuación $y = \frac{1}{e}x + 1$ es tangente a su gráfica.
- [1,25] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 4: [2,5]

Calcula el valor del siguiente límite según los valores de la constante a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$$

EJERCICIO 1:

- a) Sólo puede ser discontinua para $x = -1$ (cero del denominador) y $x = 0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua para los demás valores. Veamos detenidamente en estos puntos:

$$\boxed{x = -1}$$

Valor: $f(-1) = \frac{2}{0} = \text{NO}$

Límites: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{x+1} = \left[\frac{2}{0} \right] = \pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = -1$.

$$\boxed{x = 0}$$

Valor: $f(0) = \frac{1}{1} = 1$

Límites: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = \frac{1}{1} = 1 \\ f(0+) = 2 - e^0 = 1 \end{cases}$

Concluimos que es continua para $x = 0$.

- b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para $x = -1$, como f no es continua no puede ser derivable.

Para $x = 0$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.} \begin{cases} f'(0-) = \frac{-2}{1} = -2 \\ f'(0+) = 2e^0 = 2 \end{cases}$$

Al no coincidir, concluimos que f no es derivable para $x = 0$ (es un punto *anguloso*).

- c) Asíntotas verticales: como hay salto infinito, es $x = -1$.

Asíntotas horizontales: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x+1} \stackrel{\text{grados}}{=} \frac{-1}{1} = -1 \rightarrow y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - e^{-2x}) = 2 - e^{-\infty} = 2 - 0 = 2 \rightarrow y = 2$$

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales: $y = -1$ e $y = 2$.

Asíntotas oblicuas: no puede haber por tener horizontales tanto para $x \rightarrow -\infty$ como $x \rightarrow +\infty$.

EJERCICIO 2:

H1: Debe ser $f(0) = f(2)$:

$$f(0) = f(2) \rightarrow 0 + 0 + c = 2\sqrt{3 \cdot 2 - 2} \rightarrow c = 4$$

H2: Debe ser f continua:

El único punto en que podría ser discontinua es $x = 1$:

Valor: $f(1) = a + b + 4$

Límites: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \begin{cases} f(1-) = a + b + 4 \\ f(1+) = 2 \cdot 1 = 2 \end{cases}$

Para que sea continua debe ser, igualando:

$$a + b + 4 = 2 \text{ [*]}$$

H3: Debe ser f derivable:

Podemos derivar directamente si $x \neq 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ \frac{3}{\sqrt{3x-2}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1-) = 2a + b \\ f'(1+) = \frac{3}{1} = 3 \end{cases}$$

Como debe ser derivable para $x = 1$, igualando las derivadas laterales resulta:

$$2a + b = 3 \text{ [**]}$$

De [*] y [**] obtenemos restando ambas $a = 5$ y, sustituyendo este valor $b = -7$.

Calculemos $x_0 \in (0, 2)$ tal que $f'(x_0) = 0$:

Igualemos a cero la derivada:

$$\frac{3}{\sqrt{3x-2}} = 0 \rightarrow 3 = 0 \rightarrow \text{NO}$$

$$10x - 7 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{10} \rightarrow x_0 = 0.7$$

EJERCICIO 3:

$$f(x) = 1 + \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

a) La pendiente de la tangente es la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'(x_0) = m \rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{e} \rightarrow x_0 = e$$

La recta tangente para $x = e$ es:

$$y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e) \rightarrow y - 2 = \frac{1}{e}(x - e) \rightarrow y = \frac{1}{e}x + 1$$

Como vemos, la recta dada es la tangente para $x = e$.

b) El origen no está en la curva y no sabemos en qué punto se traza la tangente. La tangente para $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \rightarrow y - 1 - \ln(a) = \frac{1}{a}(x - a)$$

Como pasa por $(0, 0)$:

$$0 - 1 - \ln a = \frac{1}{a}(0 - a) \rightarrow -1 - \ln a = -1 \rightarrow \ln a = 0 \rightarrow a = 1$$

Así, la tangente es:

$$y - 1 = \frac{1}{1}(x - 1) \rightarrow y = x$$

EJERCICIO 4:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - a(e^x - 1)}{2x(e^x - 1)} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - a(e^x - 1)}{2(e^x - 1) + 2xe^x} = \left[\frac{2 - a}{0} \right]$$

Si $a \neq 2$ entonces es $L = \infty$.

Si $a = 2$ obtenemos de nuevo una indeterminación:

$$L = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^x}{2e^x + 2e^x + 2xe^x} = \frac{-2}{2 + 2 + 0} = -\frac{1}{2}$$

(*) Regla de L'Hôpital