Nombre:____ *Curso*:_____	
Matemáticas II – Ampliación Derivadas – 21/11/2016	

EJERCICIO 1: [2,5]

Consideremos la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x+1} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2 - \mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [0,5] Estudia su continuidad.

b) [1,25] Analiza su derivabilidad, obteniendo $f'(x)$.

c) [0,75] Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2: [2,5]

Halla a, b y c para que la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2\sqrt{3x-2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0\,,2]$ y encuentre el valor correspondiente a la tesis del teorema.

EJERCICIO 3: [2,5]

Consideremos la función $f : (0\,,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \ln(x)$$

a) [1,25] Demuestra que la recta de ecuación $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x + 1$ es tangente a su gráfica.

b) [1,25] Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que pasa por el origen de coordenadas.

EJERCICIO 4: [2,5]

Calcula el valor del siguiente límite según los valores de la constante a:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$$

EJERCICIO 1:

a) Sólo puede ser discontinua para $x=-1$ (cero del denominador) y $x=0$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua para los demás valores. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=-1}$

Valor: $f(-1)=\dfrac{2}{0}=$ NO

Límites: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x}{x+1}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=\pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x=-1$.

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0)=\dfrac{1}{1}=1$

Límites: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\begin{cases} f(0-)=\dfrac{1}{1}=1 \\ f(0+)=2-\mathrm{e}^{0}=1\end{cases}$

Concluimos que es continua para $x=0$.

b) Podemos derivar cada trozo directamente:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x<0 \\ 2\,\mathrm{e}^{-2x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

Para $x=-1$, como f no es continua no puede ser derivable.

Para $x=0$, como f es continua podemos calcular las derivadas laterales como sigue:

$$\text{D.L.}\begin{cases} f'(0-)=\dfrac{-2}{1}=-2 \\ f'(0+)=2\,\mathrm{e}^{0}=2\end{cases}$$

Al no coincidir, concluimos que f no es derivable para $x=0$ (es un punto *anguloso*).

c) <u>Asíntotas verticales</u>: como hay salto infinito, es $x=-1$.

<u>Asíntotas horizontales</u>: calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x+1}\overset{\text{grados}}{=}\frac{-1}{1}=-1 \;\rightarrow\; y=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\mathrm{e}^{-2x}\right)=2-\mathrm{e}^{-\infty}=2-0=2 \;\rightarrow\; y=2$$

Concluimos que hay dos asíntotas horizontales: $y=-1$ e $y=2$.

<u>Asíntotas oblicuas</u>: no puede haber por tener horizontales tanto para $x\to-\infty$ como $x\to+\infty$.

EJERCICIO 2:

H1: Debe ser $f\,(0) = f\,(2)$:

$$f\,(0) = f\,(2) \;\rightarrow\; 0 + 0 + c = 2\sqrt{3 \cdot 2 - 2} \;\rightarrow\; c = 4$$

H2: Debe ser f continua en $[0\,,2]$:

El único punto en que podría ser discontinua es $x = 1$:

Valor: $f\,(1) = a + b + 4$

Límites: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \begin{cases} f\,(1-) = a + b + 4 \\ f\,(1+) = 2 \cdot 1 = 2 \end{cases}$

Para que sea continua debe ser, igualando:

$$a + b + 4 = 2 \text{ [*]}$$

H3: Debe ser f derivable en $(0\,,2)$:
Podemos derivar directamente si $x \neq 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x-2}} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} f'(1-) = 2a + b \\ f'(1+) = \dfrac{3}{1} = 3 \end{cases}$$

Como debe ser derivable para $x = 1$, igualando las derivadas laterales resulta:

$$2a + b = 3 \text{ [**]}$$

De [*] y [**] obtenemos restando ambas $a = 5$ y, sustituyendo este valor $b = -7$.

TESIS: Existe $x_0 \in (0\,,2)$ tal que $f'\,(x_0) = 0$:

Igualemos a cero la derivada:

$\dfrac{3}{\sqrt{3x-2}} = 0 \;\rightarrow\; 3 = 0 \;\rightarrow\; \text{NO}$

$10x - 7 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{7}{10} \;\rightarrow\; x_0 = 0.7$

EJERCICIO 3:

$$f(x) = 1 + \ln x \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{x}$$

a) La pendiente de la tangente es la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'\,(x_0) = m \;\rightarrow\; \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\mathrm{e}} \rightarrow x_0 = \mathrm{e}$$

La recta tangente para $x = \mathrm{e}$ es:

$$y - f\,(\mathrm{e}) = f'\,(\mathrm{e}) \cdot (x - \mathrm{e}) \;\rightarrow\; y - 2 = \frac{1}{\mathrm{e}}\,(x - \mathrm{e}) \;\rightarrow\; y = \frac{1}{\mathrm{e}}x + 1$$

Como vemos, la recta dada es la tangente para $x = \mathrm{e}$.

b) El origen no está en la curva y no sabemos en qué punto se traza la tangente. La tangente para $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \to y - 1 - \ln(a) = \frac{1}{a}(x-a)$$

Como pasa por $(0\,,0)$:

$$0 - 1 - \ln a = \frac{1}{a}(0-a) \;\to\; -1 - \ln a = -1 \;\to\; \ln a = 0 \;\to\; a = 1$$

Así, la tangente es:

$$y - 1 = \frac{1}{1}(x-1) \to y = x$$

EJERCICIO 4:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2x - a\,(\mathrm{e}^x - 1)}{2x\,(\mathrm{e}^x - 1)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - a\,(\mathrm{e}^x - 1)}{2\,(\mathrm{e}^x - 1) + 2x\,\mathrm{e}^x} = \left[\frac{2-a}{0}\right]$$

Si $a \neq 2$ entonces es $L = \infty$.

Si $a = 2$ obtenemos de nuevo una indeterminación:

$$L = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\mathrm{e}^x}{2\,\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^x + 2x\,\mathrm{e}^x} = \frac{-2}{2+2+0} = -\frac{1}{2}$$

(*) Regla de L'Hôpital