Nombre: ____	*Curso:* ________

Matemáticas II – Límites y continuidad de funciones

EJERCICIO 1:

Sea la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+1} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 1 + \mathrm{e}^{1-x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

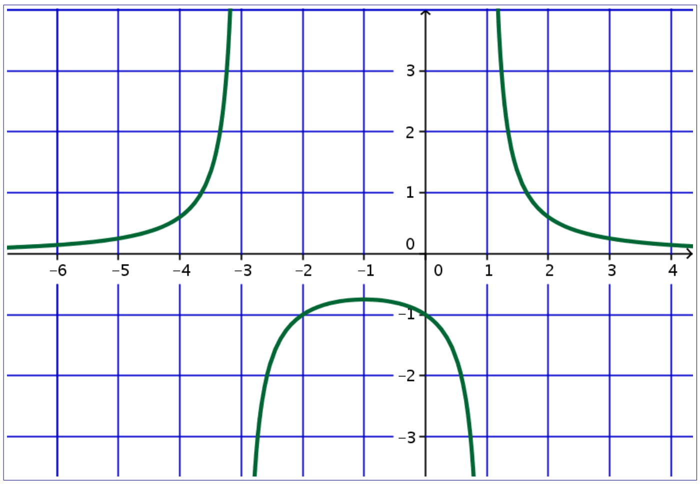
a) Obtén su dominio de definición $\mathbb{D}$.

b) Estudia su continuidad.

c) Obtén sus asíntotas.

EJERCICIO 2:

Determina a, b y c para que la curva $y = \dfrac{a}{x^2 + bx + c}$ sea la siguiente:



EJERCICIO 3:

Consideremos la función continua $f : [-1\,, 3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de la constante k.

b) Demuestra que alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

c) Dibuja su gráfica y determina los puntos en los que se alcanzan los extremos anteriores.

EJERCICIO 4:

Consideremos la ecuación

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 + \ln(x)$$

a) Demuestra que tiene solución, encontrando un intervalo de longitud igual a una décima que la contenga.

b) Dibuja las gráficas que definen cada uno de sus miembros y determina cuántas soluciones tiene.

EJERCICIO 1:

a) Observemos que $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ tiene tiene denominador cero sólo cuando $x = -1$ (que entra dentro del intervalo de definición $x < 1$), y que la curva exponencial $y = 1 + \mathrm{e}^{1-x}$ está definida en todo punto. Por ello, tenemos:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty\,, -1) \cup (-1\,, +\infty)$$

b) Sólo puede ser discontinua para $x = -1$ (cero del denominador) y para $x = 1$ (separa-fórmulas), pues cada fórmula define una función continua donde existe. Veamos detenidamente en estos puntos:

$\boxed{x=-1}$

Valor: $\quad f\,(-1) = \dfrac{2}{0} = \text{ NO}$

Límites: $\quad \lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2}{x+1} = \left[\dfrac{2}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = -1$.

$\boxed{x=1}$

Valor: $\quad f\,(1) = \dfrac{2}{1+1} = 1$

Límites: $\quad \lim\limits_{x\to 1} f\,(x) \begin{cases} f\,(1-) = \dfrac{2}{1+1} = 1 \\ f\,(1+) = 1 + \mathrm{e}^{1-1} = 1 + \mathrm{e}^0 = 2 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito para $x = 1$.

c) <u>Asíntotas verticales</u>. Como hay salto infinito, tenemos que hay una: $x = -1$

<u>Asíntotas horizontales</u>. Calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1 + \mathrm{e}^{1-\infty} = 1 + \mathrm{e}^{-\infty} = 1 + 0 = 1$$

Concluimos que hay una asíntota horizontal: $y = 1$ para $x \to +\infty$

<u>Asíntotas oblicuas.</u> Como no hay asíntota horizontal si $x \to -\infty$, puede haber una oblicua $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f\,(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2+x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} (f\,(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{x+1} = -2$$

Concluimos que hay una asíntota oblicua: $y = 2x - 2$ para $x \to +\infty$.

EJERCICIO 2:

Como la función es racional, sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador. Y en la gráfica vemos que hay asíntotas verticales (discontinuidades de salto infinito) para $x = -3$ y $x = 1$. Así que éstos son los ceros del denominador y por ello:

$$x^2 + bx + c = (x + 3)(x - 1) \rightarrow x^2 + bx + c = x^2 + 2x - 3 \rightarrow b = 2\,, c = -3$$

Por otro lado, observamos claramente que la gráfica pasa por el punto $(0\,, -1)$; así:

$$f(0) = -1 \rightarrow \frac{a}{0 + 0 - 3} = -1 \rightarrow a = 3$$

Resumiendo:

$$a = 3\,, b = 2\,, c = -3$$

EJERCICIO 3:

a) Al ser polinómica a trozos, sólo podría ser discontinua para x=0 [separa-fórmulas]. Aquí es:

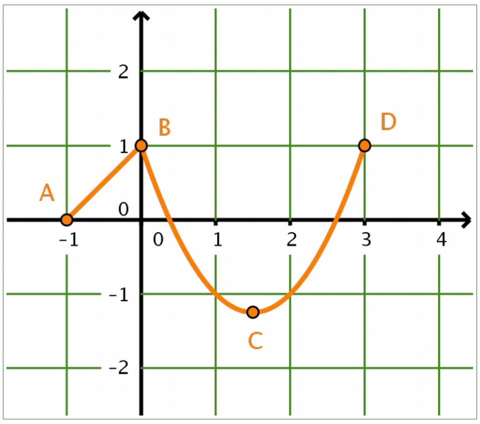
$$\left.\begin{array}{l} f(0) = k \\ f(0-) = k \\ f(0+) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow k = 1$$

b) Al ser f continua en el intervalo compacto $[-1\,, 3]$, el Teorema de Weierstrass garantiza que la función alcanza en él su valor máximo y su valor mínimo (valores extremos absolutos).

c) Su gráfica se compone de un trozo de la recta $y = x + 1$ (segmento) para $-1 \leq x \leq 0$ y de un trozo de la parábola $y = x^2 - 3x + 1$ para $0 < x \leq 3$.

Con un par de tablas de valores o con Geogebra la obtenemos.

Observamos que el mínimo (absoluto) se alcanza en el punto $C = (-1,5\,, -1,25)$ (vértice de la parábola) y que el máximo (absoluto) se alcanza en los puntos $B = (0\,, 1)$ y $D = (3\,, 1)$.

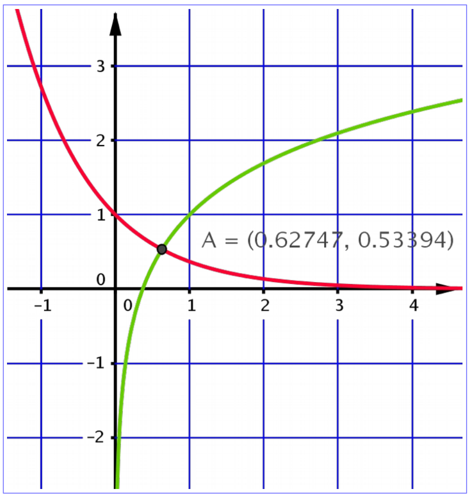


EJERCICIO 4:

Vamos a intentar aplicar el Teorema de Bolzano a la función $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} - \ln(x) - 1$, pues los ceros de esta función son precisamente las soluciones de la ecuación dada. Tanteando:

$$\varphi(0.6) = 0.05\ldots\,;\ \varphi(0.7) = -0.14\ldots$$

Ya lo tenemos: como la función $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} - \ln(x) - 1$ es continua para $x > 0$, tenemos que es continua en el intervalo compacto $[0.6\,, 0.7]$, tomando además en 0.6 y 0.7 valores de signos contrarios. Por el Teorema de Bolzano la función φ tiene al menos un cero en el intervalo $[0.6\,, 0.7]$, que es es una solución de la ecuación $\mathrm{e}^{-x} = \ln(x) + 1$.



Las gráficas de $y = \mathrm{e}^{-x}$ y de $y = \ln(x) + 1$ están dibujadas aquí al lado. Se aprecia sin duda alguna que sólo hay una solución.