Nombre: ____ *Curso:* ________

Matemáticas II – Límites y continuidad de funciones – 13/10/2016

EJERCICIO 1:

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3}{x-3} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \cos x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) [0,75] Estudia su continuidad.

b) [0,5] Razona si la función alcanza sus valores máximo y mínimo en el intervalo $[-2\,,2]$.

c) [1,25] Obtén las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 2:

Consideremos la función definida mediante la fórmula

$$f(x) = \frac{12}{2^{1/x}-4}$$

a) [1,25] Estudia su continuidad.

b) [0,5] ¿Es posible definir $f(0) = k$, para algún valor de k, de modo que sea continua para $x = 0$?

c) [0,75] Halla las asíntotas de su gráfica.

EJERCICIO 3:

a) [1] Dibuja la gráfica de $y = |x-2|$.

b) [1,5] Halla a, b y c para que la curva $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ tenga como asíntotas $x = 1$ e $y = 2$ y pase por el punto $(2\,,3)$.

EJERCICIO 4:

Consideremos la ecuación

$$\mathrm{e}^x - 4 = \ln(x)$$

a) [1,5] Demuestra que tiene solución.

b) [1] Dibuja las gráficas que definen cada uno de sus miembros y señala cuántas soluciones tiene.

EJERCICIO 1:

a) La fórmula $y = \dfrac{x^2-3}{x-3}$ tiene denominador cero sólo cuando $x=3$ (que cae fuera de su parte del dominio), y que la curva $y=\cos x$ es continua en todo punto. Por ello, sólo puede ser discontinua para $x=0$ (separa-fórmulas).

$\boxed{x=0}$

Valor: $f(0) = \dfrac{-3}{-3} = 1$

Límites: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} f(0-) = \dfrac{-3}{-3} = 1 \\ f(1+) = \cos 0 = 1 \end{cases}$

Concluimos que es continua en todo punto.

b) Como f es continua en $[-2\,,2]$, por el Teorema de los valores extremos, alcanza su valor máximo y su valor mínimo en dicho intervalo compacto.

c) <u>Asíntotas verticales</u>. Como no hay salto infinito, no tiene.

<u>Asíntotas horizontales</u>. Calculemos los límites en el infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{x-3} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \cos x = \text{ No existe}$ (porque es una onda periódica)

Concluimos que no hay una asíntota horizontal.

<u>Asíntotas oblicuas.</u> Como no hay asíntota horizontal si $x\to-\infty$, puede haber una oblicua $y=mx+n$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{x^2-3x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-3}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-3}{x-3} = 3$$

Concluimos que hay una asíntota oblicua: $y=x+3$ para $x\to-\infty$.

Para $x\to+\infty$ no hay por ser una onda.

EJERCICIO 2:

a) Sólo puede ser discontinua en los ceros de los denominadores:

$\dfrac{1}{x} \to x=0$

$\dfrac{12}{2^{1/x}-4} \to 2^{1/x}-4=0 \to 2^{1/x}=4 \to \dfrac{1}{x}=2 \to x=0.5$

$\boxed{x=0{,}5}$

$f(0.5) = \text{ NO}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{12}{0} = \pm\infty$

Hay una discontinuidad de salto infinito para $x=0.5$.

$\boxed{x = 0}$

$$f(0) = \text{ NO}$$

$$f(0-) = \frac{12}{2^{-\infty} - 4} = \frac{12}{0 - 4} = -3$$

$$f(0+) = \frac{12}{2^{+\infty} - 4} = \frac{12}{+\infty} = 0$$

Hay una discontinuidad de salto finito para $x = 0$.

b) No importa el valor que demos a la función para $x = 0$, ya que los límites laterales son distintos y siempre habrá discontinuidad de salto finito.

c) Asíntotas verticales. Como hay salto infinito, es $x = 0.5$.

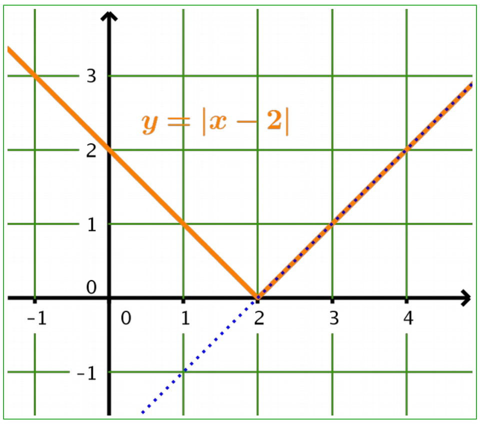
Asíntotas horizontales. Calculemos los límites en el infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{12}{2^{1/\infty} - 4} = \frac{12}{2^0 - 4} = \frac{12}{1 - 4} = -4$$

Concluimos que tiene como asíntota horizontal a $y = -4$.

EJERCICIO 3:

a) Con una sencilla tabla de valores la tenemos aquí:



b) $x = 1$ es asíntota vertical, luego es un cero del denominador:

$$1 + c = 0 \to c = -1$$

$y = 2$ es asíntota horizontal, luego:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax + b}{x - 1} = 2 \xrightarrow{grados} \frac{a}{1} = 2 \to a = 2$$

Como la curva pasa por el punto $(2\,,3)$ entonces:

$$f(2) = 3 \to \frac{2 \cdot 2 + b}{2 - 1} = 3 \to 4 + b = 3 \to b = -1$$

EJERCICIO 4:

a) Observamos que las soluciones de la ecuación dada son los ceros de la función

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 4 - \ln x$$

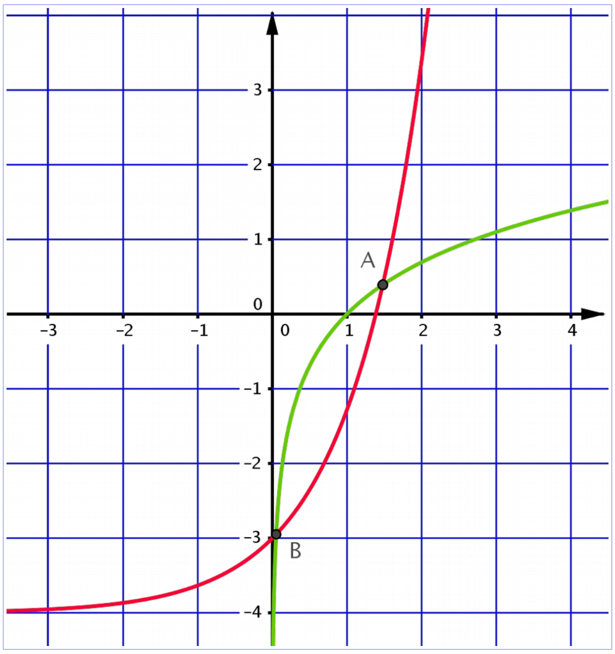
f es continua para $x > 0$

$f(1) = -1.2\ldots$

$f(2) = +2.6\ldots$

Por el Teorema de Bolzano en $[1, 2]$ se deduce que $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en $(1, 2)$, y por ello en este intervalo la ecuación tiene solución.

b) Con un par de tablitas de valores dibujamos $y = \mathrm{e}^x - 4$ e $y = \ln(x)$:



Observemos que hay dos soluciones, pues se cortan en dos puntos (la que se encontró en el apartado anterior es la que corresponde al punto A)